풀이

STEP I 2017, 문제 1

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 2017, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q1

핵심 아이디어

이 피적분함수(integrand)들은 삼각함수 분수를 정리하고 나면 모두 사실상 $f'(x)/f(x)$ 꼴(마지막 경우에는 $f'(x)/f(x)^2$ 꼴)이다. $x\sin x+\cos x$의 도함수(derivative)는 두 $\sin x$ 항이 상쇄되기 때문에 유난히 깔끔하며, 나머지 치환들도 같은 상쇄를 바탕으로 만들어져 있다. 따라서 계획은 다음과 같다. 각 피적분함수를 sin과 cos(또는 sec와 tan)으로 다시 쓰고, 도함수가 분자와 일치하는 분모를 찾아낸 다음, 치환(substitution)한다.

풀이

소문항 (i)

$u=x\sin x+\cos x$로 두면, 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x.$$

이제 피적분함수의 분자와 분모에 $\cos x$를 곱하면

$$\frac{x}{x\tan x+1}=\frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}.$$

분자가 정확히 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$이므로 $x\cos x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$이고

$$\int\frac{x}{x\tan x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\ln|u|+C=\ln|x\sin x+\cos x|+C.$$

두 번째 적분에서는 $\cos x$ 대신 $\sin x$로 같은 일을 한다. 분자와 분모에 $\sin x$를 곱하면

$$\frac{x}{x\cot x-1}=\frac{x\sin x}{x\cos x-\sin x}.$$

$v = x\cos x - \sin x$로 두자. 그러면

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x,$$

이므로 분자는 $-\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$이고

$$\int \frac{x}{x\cot x - 1}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = -\ln|x\cos x - \sin x| + C.$$

음의 부호를 빠뜨리지 않도록 주의한다. 이 부호는 $\cos x$를 미분할 때 생긴 것이다.

소문항 (ii)

첫 번째 피적분함수는 이미 시도해 볼 만한 분모를 가지고 있다. $w = x\sec^2 x - \tan x$로 두자. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^2 x = 2\sec^2 x\tan x$를 이용하면

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \sec^2 x + 2x\sec^2 x\tan x - \sec^2 x = 2x\sec^2 x\tan x.$$

이번에도 불필요한 항들이 상쇄되고, 분자는 $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$이다. 따라서

$$\int \frac{x\sec^2 x\,\tan x}{x\sec^2 x - \tan x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w = \tfrac{1}{2}\ln|x\sec^2 x - \tan x| + C.$$

생각해 보기 마지막 적분에는 sec도 tan도 들어 있지 않다. 이것을 $w = x\sec^2 x - \tan x$와 어떻게 연결할 수 있을까?

분모의 괄호에서 $\cos^2 x$를 묶어 내면

$$x - \sin x\cos x = \cos^2 x\left(x\sec^2 x - \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \cos^2 x\,(x\sec^2 x - \tan x) = w\cos^2 x.$$

그러므로 $(x - \sin x\cos x)^2 = w^2\cos^4 x$이고

$$\frac{x\sin x\cos x}{(x-\sin x\cos x)^2} = \frac{x\sin x\cos x}{w^2\cos^4 x} = \frac{x\sec^2 x\tan x}{w^2},$$

이다. $\dfrac{\sin x\cos x}{\cos^4 x} = \dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$이기 때문이다. 분자는 다시 $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$이므로, 같은 치환으로

$$\begin{aligned}\int \frac{x\sin x\cos x}{(x-\sin x\cos x)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{w^2}\,\mathrm{d}w = -\frac{1}{2w} + C\\ &= -\frac{1}{2(x\sec^2 x - \tan x)} + C = -\frac{\cos^2 x}{2(x-\sin x\cos x)} + C,\end{aligned}$$

를 얻는다. 여기서 마지막 단계는 분자와 분모에 $\cos^2 x$를 곱한 것이다. 배각(double angle) 공식을 선호한다면 이것은 $-\dfrac{\cos^2 x}{2x - \sin 2x} + C$이다.

검산

- 각 답을 미분하여 피적분함수가 다시 나오는지 확인한다. 마지막 답의 경우, $-\cos^2 x/\big(2(x-\sin x\cos x)\big)$에 몫의 미분법(quotient rule)을 적용할 때 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-\sin x\cos x) = 1-\cos 2x = 2\sin^2 x$를 이용하며, $\sin^2 x\cos^2 x$ 항들이 깔끔하게 정리된다.
- 수치 계산: 구간 $[0.3, 1.2]$에서 첫 번째 적분의 값은 $0.34953\ldots$이고, $\ln|x\sin x+\cos x|$도 같은 양만큼 변한다. 같은 구간에서 마지막 적분의 값은 $25.7364\ldots$로, $-\cos^2 x/\big(2(x-\sin x\cos x)\big)$와 일치한다. 네 답 모두 이런 방식으로 컴퓨터를 이용해 확인하였다.

흔한 실수

- $\tan x$나 $\cot x$를 먼저 정리하지 않고 치환하는 것: 분자는 전체에 $\cos x$나 $\sin x$를 곱한 뒤에야 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$와 일치한다.
- 소문항 (i)의 두 번째 적분에서 음의 부호를 빠뜨리거나, 소문항 (ii)에서 인수 $\frac{1}{2}$을 빠뜨리는 것.
- 습관적으로 마지막 적분에서 로그를 떠올리는 것: $1/w^2$을 적분하면 $-1/w$이다.

STEP 너머

여기서 쓰인 요령은 역설계(reverse-engineering)이다. 상쇄가 일어난 뒤 분모의 도함수가 정확히 분자가 되도록 치환을 고르는 것이다. 그 배경에는 $\int f'/f = \ln|f|$, 즉 로그 도함수(logarithmic derivative)라는 사실이 있으며, 이는 복소해석학(complex analysis)에서(함수의 영점 개수 세기) 그리고 미분방정식(differential equations)에서 적분인자(integrating factor)로 다시 등장한다. 많은 STEP 적분 문제는 신중하게 고른 함수를 미분한 다음 답을 감추는 방식으로 만들어진다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)에 이런 문제를 알아보는 연습이 많이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.