풀이

STEP III 2016, 문제 9

역학 • 탄성 용수철과 단진동

> **STEP III 2016, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q9

핵심 아이디어

원점을 삼각형의 중심에 두고 대칭성을 이용한다. 평형 위치(equilibrium position)는 중심이며, 이곳에서 크기가 같은 세 장력(tension)이 서로 상쇄된다. 입자가 P를 향하는 직선을 따라 움직일 때, 용수철 QX와 RX는 계속 서로의 거울상이므로 옆으로 당기는 힘이 상쇄되고, 운동은 그 직선 위에 머문다. RX를 구하려면 코사인 법칙(cosine rule)이 필요하다. 주기(period)를 구할 때는 정확한 복원력(restoring force)을 먼저 적은 다음, 작은 변위에 대해 일차인 항만 남긴다.

풀이

X를 매끄러운 탁자 위의 입자로, 용수철을 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 가벼운 용수철로 모형화한다. 따라서 길이가 r인 용수철의 장력은 $\frac{\lambda}{l}(r-l)$이다.

평형

O를 삼각형의 중심이라 하자. 각 꼭짓점은 O로부터

$$c = \frac{2}{3} \times (\text{높이}) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}\, a = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

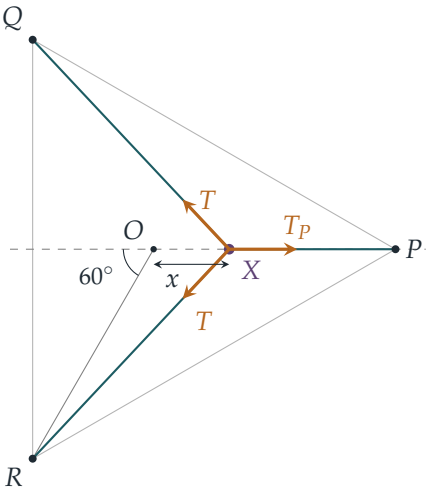
만큼 떨어져 있고, 직선 OP, OQ, OR는 서로 120°를 이룬다. X가 O에 있으면 각 용수철의 길이는 c이므로 세 장력의 크기가 모두 같다. 서로 120°를 이루는 크기가 같은 세 힘의 합은 0이므로, O는 평형 위치이다. 이것이 우리가 사용할 평형이다. $l < \frac{2}{\sqrt{3}}a$이므로 각 용수철은 늘어나 있고, 늘어난 길이(extension)는

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\, a - l,$$

이다. 이로써 요구된 결과를 얻는다.

RX의 장력

x축을 OP를 따라 잡고, P 쪽을 양의 방향으로 한다. X가 O로부터 P 쪽으로 변위 x만큼 떨어져 있다고 하자. 그러면 $OX = x, OR = c, \angle XOR = 180° - 60° = 120°$이다.



삼각형 XOR에서 코사인 법칙에 의해

$$RX^2 = c^2 + x^2 - 2cx\cos 120° = c^2 + cx + x^2 = \frac{4a^2}{3} + \frac{2ax}{\sqrt{3}} + x^2.$$

따라서 훅의 법칙에 의해 RX의 장력은

$$T = \frac{\lambda}{l}\left(\sqrt{\frac{4a^2}{3} + \frac{2ax}{\sqrt{3}} + x^2} - l\right),$$

이고, 이로써 요구된 결과를 얻는다. 축 OP에 대한 대칭성에 의해 $QX = RX$이므로, QX의 장력도 같은 T이다.

운동 방정식

$r = RX$라 하자. 용수철 PX의 길이는 $c - x$이므로 그 장력은 $T_P = \frac{\lambda}{l}(c - x - l)$이고, P 쪽$(+x$ 방향$)$으로 작용한다.

점 R의 x좌표는 $-c\cos 60° = -\frac{c}{2}$이므로, X에서 R까지의 변위의 x성분은 $-\left(x + \frac{c}{2}\right)$이다. 따라서 XR 방향의 힘 T의 x성분은 $-T\frac{x + c/2}{r}$이다. QX에 의한 힘도 같은 x성분을 가지며, 두 수직 성분은 대칭성에 의해 상쇄된다. 그러므로 직선 OP를 가로지르는 힘은 없고, X는 이 직선을 따라 움직인다.

? 생각해 보기 이 제곱근에서 어떻게 일차 방정식을 얻을 수 있을까?

먼저 정확한 힘을 적은 다음, 작은 x에 대해 전개한다. OP 방향으로 힘을 분해하면

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= T_P - 2T\,\frac{x+c/2}{r} = \frac{\lambda}{l}\left[(c-x-l)-(2x+c)\left(1-\frac{l}{r}\right)\right] \\ &= \frac{\lambda}{l}\left[-3x-l+\frac{l(2x+c)}{r}\right]. \end{aligned}$$

이 방정식은 정확하다. 이제 $r^2 = c^2\left(1+\frac{x}{c}+\frac{x^2}{c^2}\right)$이다. 이항 전개(binomial expansion)를 이용하고 x^2 이상의 항을 버리면

$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{c}\left(1-\frac{x}{2c}\right), \qquad \frac{2x+c}{r} \approx \left(1+\frac{2x}{c}\right)\left(1-\frac{x}{2c}\right) \approx 1+\frac{3x}{2c}.$$

이를 대입하면

$$m\ddot{x} \approx \frac{\lambda}{l}\left[-3x-l+l+\frac{3lx}{2c}\right] = -\frac{3\lambda}{l}\left(1-\frac{l}{2c}\right)x.$$

$\frac{l}{2c} = \frac{\sqrt{3}l}{4a}$이므로

$$\ddot{x} \approx -\omega^2 x, \qquad \omega^2 = \frac{3\lambda(4a-\sqrt{3}\,l)}{4mla}.$$

$\sqrt{3}l < 2a < 4a$이므로 이 ω^2은 양수이다. 따라서 이 힘은 복원력이며, 작은 x에 대해 입자는 O를 중심으로 근사적인 단진동(simple harmonic motion)을 하고, 그 주기는

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4mla}{3(4a-\sqrt{3}\,l)\lambda}},$$

이다. 이로써 요구된 결과를 얻는다.

검산

- $x = 0$일 때 정확한 힘은 $\frac{\lambda}{l}\left[-l+\frac{lc}{c}\right] = 0$이며, 이는 처음에 구한 평형과 일치한다.
- 단위: λ는 힘이고 l, a는 길이이므로 $\frac{mla}{a\lambda}$의 단위는 $\mathrm{kg\,m/N} = \mathrm{s}^2$이고, 주기는 시간의 단위를 가진다.
- ω^2을 구하는 두 번째 방법. 작은 변위에 대해 용수철 하나는 늘어남에 의해 강성(stiffness) $\frac{\lambda}{l}\cos^2\phi$를, 회전에 의해 강성 $\frac{T_0}{c}\sin^2\phi$를 기여한다. 여기서 ϕ는 용수철이 OP와 이루는 각이고, $T_0 = \frac{\lambda}{l}(c-l)$은 평형 상태의 장력이다. $\phi = 0°, 60°, 60°$이면 전체 강성은 $\frac{3}{2}\cdot\frac{\lambda}{l}+\frac{3}{2}\cdot\frac{T_0}{c} = \frac{3\lambda}{l}\left(1-\frac{l}{2c}\right)$로, 앞의 결과와 같다.
- $a = \lambda = m = 1, l = 0.8$일 때 공식은 약 2.838의 주기를 준다. P 쪽으로 작은 변위를 준 상태에서 시작하여 2차원 운동 전체를 컴퓨터로 시뮬레이션하면, 유효숫자 네 자리까지 같은 값을 얻는다.

흔한 실수

- $\cos 120^\circ = +\frac{1}{2}$을 쓰거나, 코사인 법칙에서 잘못된 각을 쓰는 것. 그러면 제곱근 안에 $-\frac{2ax}{\sqrt{3}}$이 나온다.
- QX와 RX의 장력을 상수로 취급하는 것. 장력의 **방향** 변화와 **크기** 변화가 모두 x에 대해 일차인 항을 만든다.
- 중심에서 꼭짓점까지의 거리를 구할 때 삼각형의 한 변을 $2a$가 아니라 a로 쓰는 것.

STEP 너머

모든 안정한 평형 근처에서 힘은 변위에 대해 근사적으로 일차이다. 여기서 복원력은 탄성 위치 에너지(elastic potential energy)의 기울기(gradient)이고, $m\omega^2$은 그 이계도함수(second derivative)이다. 2차원에서는 이 이계도함수가 2×2 행렬(헤세 행렬(Hessian))이 되고, 그 고유벡터(eigenvector)가 미소 진동의 **기준 진동**(normal modes)이다. 삼중 대칭성에 의해 이 계는 OP 방향만이 아니라 O를 중심으로 모든 방향에서 같은 주기로 진동한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 미소 진동과 연성계를 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.