풀이

STEP III 2016, 문제 8

순수수학 • 함수방정식

> **STEP III 2016, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q8

핵심 아이디어

각 방정식은 x에서의 미지의 함수의 값을 어떤 변환된 점에서의 값과 연결한다. 그 변환을 한 번 더(또는 세 번째로) 적용했을 때 다시 x로 돌아온다면, 변환된 점을 방정식에 대입하여 같은 미지수에 대한 **두 번째** 방정식을 얻는다. 이제 연립일차방정식(simultaneous linear equations)이 생겼으므로, 보통의 미지수를 다룰 때와 똑같이 원하지 않는 값들을 소거(eliminate)할 수 있다.

풀이

소문항 (i)

이 방정식은 **모든** x에 대하여 성립하므로, x를 $-x$로 바꾸어도 성립한다.

$$\mathrm{f}(-x) + (1+x)\,\mathrm{f}(x) = (-x)^2 = x^2,$$

이것이 바로 구하려던 결과이다.

이제 두 미지수 $\mathrm{f}(x)$와 $\mathrm{f}(-x)$에 대한 두 방정식이 있다. 두 번째 방정식에서 $\mathrm{f}(-x) = x^2 - (1+x)\mathrm{f}(x)$를 얻고, 이를 원래 방정식에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) + (1-x)(x^2 - (1+x)\mathrm{f}(x)) &= x^2 \\ \mathrm{f}(x)(1 - (1-x^2)) &= x^2 - (1-x)x^2 \\ x^2\,\mathrm{f}(x) &= x^3. \end{aligned}$$

$x \neq 0$이면 x^2으로 나누어 $\mathrm{f}(x) = x$를 얻는다. $x = 0$에서는 원래 방정식이 $\mathrm{f}(0) + \mathrm{f}(0) = 0$이

되므로 역시 $f(0) = 0$이다. 따라서

$$f(x) = x \quad \text{모든} x.$$

이다.

확인: $x + (1-x)(-x) = x - x + x^2 = x^2$이므로 조건을 만족한다.

생각해 보기 문제에서는 왜 굳이 답을 확인하라고 요구할까?

우리의 논증이 보여 주는 것은 어떤 함수가 방정식을 만족한다**면** 그 함수는 반드시 $f(x) = x$라는 사실뿐이다. 그런 함수가 실제로 존재한다는 것은 보여 주지 않는다. 식을 변형하는 과정에서 정보를 잃어버렸을 수도 있고, 그렇다면 어떤 함수도 조건을 만족하지 않을 것이다. 다시 대입해 보는 것이 이 빈틈을 메운다.

소문항 (ii)

먼저 $x \neq 1$인 모든 x에 대하여 $K(x) \neq 1$임에 주목하자. $\frac{x+1}{x-1} = 1$이 되려면 $x+1 = x-1$이어야 하기 때문이다. 따라서 $K(K(x))$가 정의되고, 분자와 분모에 $x-1$을 곱하면 다음을 얻는다.

$$K(K(x)) = \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{(x+1)+(x-1)}{(x+1)-(x-1)} = \frac{2x}{2} = x.$$

g에 대한 방정식은 $g(x) + x\,g(K(x)) = x$이다. $K(x) \neq 1$이므로 x를 $K(x)$로 바꿀 수 있고, $K(K(x)) = x$이므로 다음을 얻는다.

$$g(K(x)) + K(x)\,g(x) = K(x).$$

$K(x)$를 K로 쓰자. 그러면 $g(K) = K - K\,g(x)$이고, 이를 원래 방정식에 대입하면

$$g(x) + x(K - K\,g(x)) = x \quad \Longrightarrow \quad (1 - xK)\,g(x) = x - xK.$$

이다. 이제

$$1 - xK = \frac{(x-1) - x(x+1)}{x-1} = -\frac{x^2+1}{x-1},$$
$$x - xK = x \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{x-1} = -\frac{2x}{x-1}.$$

이다. $x^2 + 1 > 0$이므로 인수 $1 - xK$는 결코 0이 아니고, 따라서 나눌 수 있다.

$$g(x) = \frac{-2x/(x-1)}{-(x^2+1)/(x-1)} = \frac{2x}{x^2+1} \qquad (x \neq 1),$$

이것이 구하려던 결과이다. (이 함수가 실제로 방정식을 만족함을 확인할 수 있다. 예를 들어 $x = 2$일 때 $K(2) = 3$이고 $\frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{6}{10} = 2$이다.)

소문항 (iii)

$\mathrm{M}(x) = \dfrac{1}{1-x}$라 하자. 방정식은

$$\mathrm{h}(x) + \mathrm{h}(\mathrm{M}(x)) = 1 - x - \mathrm{M}(x),$$

이고, 우변이 x와 $\mathrm{M}(x)$만으로 쓰여 있다는 점이 고무적이다.

이번에는 M이 자기 자신의 역함수(inverse)가 아니므로, 거듭 적용해 보자. $x \neq 0, 1$에 대하여

$$\mathrm{M}(\mathrm{M}(x)) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} = \frac{x-1}{x}, \qquad \mathrm{M}(\mathrm{M}(\mathrm{M}(x))) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{1} = x.$$

이다. 따라서 M의 주기(period)는 3이다. 또한 M이 우리를 정의역(domain) 안에 머물게 해야 한다. $\mathrm{M}(x)$는 결코 0이 아니고, $\mathrm{M}(x) = 1$은 $x = 0$일 때뿐이므로, $x \neq 0, 1$이면 $\mathrm{M}(x) \neq 0, 1$이기도 하다.

> ? **생각해 보기** M을 두 번 적용해서는 x로 돌아오지 않는다. 어떻게 하면 충분한 개수의 방정식을 얻을 수 있을까?

순환의 세 점을 모두 사용한다. $a = x$, $b = \mathrm{M}(x)$, $c = \mathrm{M}(b) = \frac{x-1}{x}$로 두면 $\mathrm{M}(c) = a$이다. 방정식을 a, b, c에 차례로 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathrm{h}(a) + \mathrm{h}(b) &= 1 - a - b, \\ \mathrm{h}(b) + \mathrm{h}(c) &= 1 - b - c, \\ \mathrm{h}(c) + \mathrm{h}(a) &= 1 - c - a. \end{aligned}$$

세 식을 모두 더하고 2로 나누면

$$\mathrm{h}(a) + \mathrm{h}(b) + \mathrm{h}(c) = \tfrac{3}{2} - (a + b + c).$$

이다. 여기서 두 번째 방정식을 빼면

$$\mathrm{h}(a) = \tfrac{3}{2} - a - b - c - (1 - b - c) = \tfrac{1}{2} - a.$$

가 남는다. 따라서

$$\mathrm{h}(x) = \tfrac{1}{2} - x \qquad (x \neq 0,\ x \neq 1).$$

이다.

확인: $(\frac{1}{2} - x) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{1-x}) = 1 - x - \frac{1}{1-x}$이므로 조건을 만족한다.

검산

▶ (i)에서 $x = 3$을 넣어 보자. $3 + (-2)(-3) = 9 = 3^2$이다.

- (ii)에서 $x = -1$을 넣어 보자. $\mathrm{K}(-1) = 0$이고 $\mathrm{g}(-1) + (-1)\,\mathrm{g}(0) = -1 - 0 = -1$이다. 또한 $\mathrm{K}(0) = -1$이므로 주기가 2임이 확인된다.
- (iii)에서 $x = 2$를 넣어 보자. 순환은 $2 \to -1 \to \frac{1}{2} \to 2$이고, $\mathrm{h}(2) + \mathrm{h}(-1) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$이며, $1 - 2 - (-1) = 0$이다.

세 함수 모두, 정확한 산술을 사용하여 무작위로 고른 유리수 2000개에서 각 방정식을 확인하는 컴퓨터 검사로도 확인하였다.

흔한 실수

- (i)에서 x^2으로 나누면서 $x = 0$인 경우를 잊는 것. 이 경우는 따로 (한 줄짜리) 논증이 필요하다.
- $\mathrm{K}(x)$나 $\mathrm{M}(x)$를 x 자리에 대입하면서, 그 값이 방정식이 성립하는 정의역 안에 머무는지 확인하지 않는 것.
- (iii)에서 한 번만 대입하고 세 미지수 앞에서 막혀 버리는 것. 순환 전체가 필요하다.

STEP 너머

사상 $x \mapsto -x$, K, M은 모두 뫼비우스 변환(Möbius transformation) $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$이며, 이들은 합성(composition)에 대하여 군(group)을 이룬다. 유한한 위수(finite order)를 갖는 변환은 유한 순환군(cyclic group)을 생성하고, 여기서 사용한 방법은 그 군 전체에 걸쳐 더하는(또는 소거하는) 것인데, 이 아이디어는 군 표현론(group representation theory)에서 다시 등장한다. 뫼비우스 변환은 2×2 행렬에 대응하며, 행렬을 세제곱하여 $\mathrm{M}^3 =$ 항등함수임을 알아낼 수 있다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에는 뫼비우스 변환에 대한 아름다운 설명이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.