풀이

STEP III 2016, 문제 7

순수수학 • 1의 거듭제곱근

> **STEP III 2016, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q7

이 문제는 *Beyond STEP*의 5.4 절 **정다각형 속의 거리**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch05/polygon-distances.html

핵심 아이디어

거리는 절댓값(modulus)이고, 절댓값들의 곱은 곱의 절댓값이다. 다각형을 아르강 도표(Argand diagram) 위에 놓아 그 꼭짓점들이 n제곱 단위근(roots of unity)을 회전시킨 점이 되게 하면, 처음의 항등식에 의해 거리들의 곱은 적당한 w에 대하여 $|w^n - 1|$이 된다. 실제로 해야 할 일은 좌표를 잘 고르는 것뿐이다. O를 원점에 두고 X_0X_1의 수직이등분선(perpendicular bisector)이 실수축이 되게 하면 P는 실수가 된다.

풀이

인수분해

$k = 0, 1, \ldots, n-1$에 대하여 $(\omega^k)^n = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k} = 1$이므로 각 ω^k는 $z^n - 1$의 근이다. 이 n개의 수는 서로 다르다. 그 편각(argument) $2\pi k/n$이 $[0, 2\pi)$ 안의 서로 다른 수이기 때문이다. 항등식의 양변은 모두 최고차항의 계수가 1인 n차 다항식(monic polynomial)이므로, 그 차

$$D(z) = (z-1)(z-\omega)\cdots(z-\omega^{n-1}) - (z^n - 1)$$

의 차수는 많아야 $n-1$이다. 그런데 D는 서로 다른 n개의 점 $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$에서 0이 되고, 차수가 많아야 $n-1$인 영이 아닌 다항식은 근을 많아야 $n-1$개 가진다. 따라서 $D \equiv 0$이고, 다음이 성립한다.

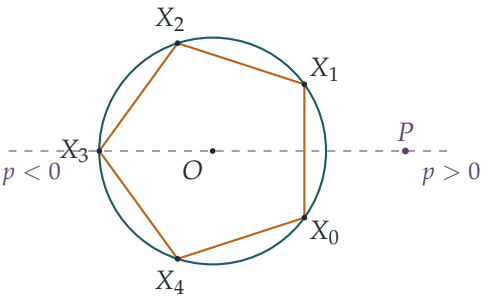
$$\prod_{k=0}^{n-1}(z-\omega^k) = z^n - 1 \quad \text{모든 복소수} z.$$

소문항 (i)

꼭짓점에는 원을 따라 차례로 이름이 붙어 있다고 하자. 그러면 X_0과 X_1은 이웃하고 $\angle X_0OX_1 = 2\pi/n$이다. 도형을 회전하거나 대칭이동해도 거리는 변하지 않으므로, O를 원점에 두고

$$X_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-1)\pi/n} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}\,\omega^k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

로 놓을 수 있다. 그러면 $X_0 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}$과 $X_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}$은 실수축에 대하여 서로 대칭이므로, X_0X_1의 수직이등분선은 실수축이다. X_0과 X_1에서 같은 거리에 있는 점은 정확히 이 직선 위의 점들이므로, P는 실수 p이고 $|OP| = |p|$이다. X_0X_1의 중점은 $\cos(\pi/n) > 0$이므로, $p > 0$은 P가 O에 대하여 변 X_0X_1과 같은 쪽에 있다는 뜻이다.



(그림은 $n = 5$인 경우이다. n이 홀수이면 O를 지나는 이 직선은 반대쪽 꼭짓점도 지난다.)

이제 $|ab| = |a||b|$와 $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}| = 1$을 이용하면

$$\begin{aligned}|PX_0|\,|PX_1|\cdots|PX_{n-1}| &= \prod_{k=0}^{n-1}|p - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}\omega^k| = \prod_{k=0}^{n-1}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}|\,|p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n} - \omega^k| \\ &= \left|\prod_{k=0}^{n-1}(p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n} - \omega^k)\right| = \left|(p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n})^n - 1\right|,\end{aligned}$$

이다. 마지막 등호는 $z = p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}$으로 놓은 인수분해(factorisation)에서 나온다. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$이므로

$$|PX_0|\,|PX_1|\cdots|PX_{n-1}| = |-p^n - 1| = |p^n + 1|.$$

생각해 보기 n이 홀수일 때는 p의 부호가 중요한데, n이 짝수일 때는 왜 그렇지 않을까?

n이 짝수이면 p의 부호와 관계없이 $p^n = |p|^n \geq 0$이므로 $|p^n + 1| = |p|^n + 1$이고,

$$|PX_0| \times |PX_1| \times \cdots \times |PX_{n-1}| = |OP|^n + 1,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. n이 홀수이면 p^n은 p와 부호가 같으며, 두 경우로 나뉜다.

- P가 O에서 X_0X_1의 중점을 지나는 반직선(ray) 위에 있으면($p \geq 0$), $p^n = |OP|^n$이고 곱은 $|OP|^n + 1$이다.
- P가 반대쪽 반직선 위에 있으면($p < 0$), 이 반직선은 n이 홀수일 때 O에서 꼭짓점 $X_{(n+1)/2}$($e^{i\pi} = -1$에 있는 점)를 지나는 반직선이고, $p^n = -|OP|^n$이며 곱은

$$\big|\,|OP|^n - 1\big|.$$

  이다.

두 번째 경우에는 절댓값 기호가 중요하다. P가 원 안에 있을 때 그 값은 $1 - |OP|^n$이고, $P = X_{(n+1)/2}$일 때는 0이다. 이때 거리 중 하나가 0이므로 당연히 그래야 한다.

소문항 (ii)

이번에는 $X_k = \omega^k$가 되도록 회전하여 $X_0 = 1$로 놓는다. $z \neq 1$에 대하여 인수분해로부터

$$(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1}) = \frac{z^n - 1}{z - 1} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}.$$

을 얻는다. 양 끝은 무한히 많은 점(모든 $z \neq 1$)에서 값이 같은 다항식이므로, $z = 1$을 포함한 모든 z에 대하여 같다. $z = 1$을 대입하면

$$(1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{n-1}) = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} = n.$$

이다. 절댓값을 취하고 $|1 - \omega^k| = |X_0X_k|$를 이용하면

$$|X_0X_1| \times |X_0X_2| \times \cdots \times |X_0X_{n-1}| = n,$$

이고, 이것이 원하는 결과이다.

검산

- 정사각형($n = 4$)에서 $P = O$인 경우: 모든 거리가 1이므로 곱은 $1 = 0^4 + 1$이다. P가 아주 멀리 있으면 곱은 공식대로 $|OP|^n$처럼 행동한다.
- 정삼각형($n = 3$)에서 P가 반대쪽으로 O에서 거리 2에 있는 경우: 거리는 1(-1에 있는 반대쪽 꼭짓점까지)과 $\sqrt{(-2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \sqrt{7}$ 두 번이므로, 곱은 $7 = 2^3 - 1$이다.
- 정사각형에 대한 소문항 (ii): $|X_0X_1|\,|X_0X_2|\,|X_0X_3| = \sqrt{2} \times 2 \times \sqrt{2} = 4$. 세 결과 모두 임의의 n, 회전, P의 위치에 대하여 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 X_0을 1에 놓는 것: 그러면 X_0X_1의 수직이등분선은 실수축이 아니라 각 π/n을 이루는 직선이 되어 계산이 더 복잡해진다. 좌표는 P에 맞게 고르자.
- n이 홀수이고 P가 반대쪽에 있는 경우에 절댓값을 빠뜨리는 것: P가 원 안에 있으면 $|OP|^n - 1$은 음수이다.
- $\dfrac{z^n-1}{z-1}$에 $z=1$을 바로 대입하는 것: 값 n을 정당화하는 것은 다항식 항등식이다.

STEP 너머

소문항 (ii)는 $z^n - 1$의 $z = 1$에서의 미분계수, 즉 도함수(derivative)의 값이 n이라는 명제이다. 일반적으로 $f(z) = \prod(z - a_k)$이면 $f'(a_0) = \prod_{k\neq 0}(a_0 - a_k)$이다. 이와 같은 단위근에 대한 곱은 원분다항식(cyclotomic polynomial)의 이론과 판별식(discriminant)의 계산에 등장하며, 소문항 (i)은 본질적으로 정다각형의 대칭축 위의 한 점에서 꼭짓점까지의 거리에 관한 로저 코츠(Roger Cotes)의 고전적인 결과이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수 곱셈의 이러한 기하학이 전개되는 모습을 볼 수 있는 아름다운 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.