풀이

STEP III 2016, 문제 6

순수수학 • 쌍곡선 함수

> **STEP III 2016, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q6

핵심 아이디어

$\operatorname{sech} x = a\tanh x + b$의 양변에 $\cosh x$를 곱하면 $a\sinh x + b\cosh x = 1$을 얻는데, 이것이 바로 첫 소문항에 나오는 결합이다. 따라서 첫 번째 할 일은 익숙한 "$R\cos(x+\alpha)$" 기법의 쌍곡선함수(hyperbolic function) 버전이다. 삼각함수의 경우와 달리, 얻어지는 꼴은 B와 $\pm A$의 대소 관계에 따라 달라지며, 각 꼴을 보면 해가 몇 개인지 곧바로 알 수 있다.

풀이

$A\sinh x + B\cosh x$의 꼴

전개하면

$$R\cosh(x+\gamma) = R\sinh\gamma\,\sinh x + R\cosh\gamma\,\cosh x,$$

이므로 $R\sinh\gamma = A$, $R\cosh\gamma = B$가 되어야 한다. $\cosh^2\gamma - \sinh^2\gamma = 1$이므로 반드시 $R^2 = B^2 - A^2$이고 $\tanh\gamma = A/B$이다. $B > A > 0$이면 두 조건을 모두 만족시킬 수 있다. 다음과 같이 잡자.

$$R = \sqrt{B^2 - A^2} > 0, \qquad \gamma = \operatorname{artanh}\frac{A}{B},$$

$0 < A/B < 1$이므로 이 값은 존재한다. 그러면 $\cosh\gamma = 1/\sqrt{1 - A^2/B^2} = B/R$이고 $\sinh\gamma = \tanh\gamma\cosh\gamma = A/R$이므로, 요구한 대로 $R\cosh\gamma = B$, $R\sinh\gamma = A$이다. 따라서 $A\sinh x + B\cosh x = R\cosh(x+\gamma)$이다.

$A > 0$일 때 나머지 경우는 다음과 같다.

▶ $-A < B < A$: 대신 $R\sinh(x+\gamma) = R\cosh\gamma\sinh x + R\sinh\gamma\cosh x$와 계수를 비교

하면

$$A\sinh x + B\cosh x = \sqrt{A^2 - B^2}\,\sinh(x+\gamma), \qquad \gamma = \operatorname{artanh}\frac{B}{A}.$$

- $B = A$: $A(\sinh x + \cosh x) = Ae^x$.
- $B = -A$: $A(\sinh x - \cosh x) = -Ae^{-x}$.
- $B < -A$: 첫 번째 결과를 $-A\sinh x - B\cosh x$에 적용하면($-B > A$, $-A < 0$이다. 위의 계산에는 $|A| < B$만 필요했다)

$$A\sinh x + B\cosh x = -\sqrt{B^2 - A^2}\,\cosh(x+\gamma), \qquad \gamma = \operatorname{artanh}\frac{A}{B}.$$

교점의 방정식

$\cosh x > 0$이므로 두 곡선은 다음을 만족하는 곳에서 만난다.

$$\operatorname{sech} x = a\tanh x + b \iff 1 = a\sinh x + b\cosh x. \qquad (*)$$

소문항 (i)

$b > a > 0$일 때 $R = \sqrt{b^2 - a^2}$라 하면 $(*)$는 다음이 된다.

$$\cosh\left(x + \operatorname{artanh}\tfrac{a}{b}\right) = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

두 곡선이 만나면 이 방정식은 해를 가지므로 우변은 1 이상이다. $c \geq 1$일 때 $\cosh u = c$의 해는 $u = \pm\operatorname{arcosh} c$이므로

$$x = \pm\operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}\right) - \operatorname{artanh}\frac{a}{b},$$

이고, 이것이 구하는 꼴이다.

소문항 (ii)

$a > b > 0$이면 sinh의 경우이다. $(*)$는 $\sqrt{a^2 - b^2}\,\sinh\left(x + \operatorname{artanh}\frac{b}{a}\right) = 1$이 된다. sinh는 $\mathbb{R}$에서 $\mathbb{R}$로의 전단사함수(bijection)이므로 교점은 항상 정확히 하나이며, 그 위치는 다음과 같다.

$$x = \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right) - \operatorname{artanh}\frac{b}{a}.$$

소문항 (iii)

첫 소문항의 각 경우($A = a > 0$, $B = b$)에 대해 $(*)$의 해의 개수를 세어 보자.

- $b < -a$: 좌변 $-\sqrt{b^2 - a^2}\cosh(x+\gamma)$가 음수이므로 해가 없다.

- $b = -a$: $-ae^{-x} = 1$은 해가 없다.
- $-a < b < a$: (ii)에서처럼 해가 정확히 하나이다. 거기서의 논증은 이 범위의 모든 b에 대해 성립한다.
- $b = a$: $ae^{x} = 1$은 유일한 해 $x = -\ln a$를 갖는다.
- $b > a$: $\cosh(x+\gamma) = 1/\sqrt{b^2-a^2}$는 $1/\sqrt{b^2-a^2} > 1$이면 해가 두 개, 1과 같으면 한 개, 1보다 작으면 없다.

? **생각해 보기** $b \le a$인 경우에는 왜 결코 두 점이 나올 수 없을까?

이 경우 $(*)$의 좌변은 x에 대한 순단조(strictly monotonic) 함수이거나($\sinh(x+\gamma)$ 또는 $e^{\pm x}$의 상수배), 항상 음수이다. 따라서 값 1을 많아야 한 번 취한다. 감소했다가 다시 증가하는 cosh 꼴만이 1에 두 번 도달할 수 있다.

따라서 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만날 필요충분조건은 $b > a$이고 $b^2 - a^2 < 1$인 것, 즉

$$a < b < \sqrt{a^2+1}.$$

소문항 (iv)

$\operatorname{sech} x - (a\tanh x + b) = \operatorname{sech} x\,(1 - a\sinh x - b\cosh x)$이고 $\operatorname{sech} x \neq 0$이므로, 두 곡선은 $g(x) = a\sinh x + b\cosh x - 1$이 중근(repeated zero)을 갖는 곳, 즉 $g(x) = g'(x) = 0$인 곳에서 정확히 접한다. sinh의 경우와 지수함수의 경우에는 $g'(x)$가 $\cosh(x+\gamma)$ 또는 e^x의 상수배여서 결코 0이 되지 않으므로 중근이 없다. $b > a$인 경우 $g(x) = R\cosh(x+\gamma) - 1$, $g'(x) = R\sinh(x+\gamma)$이고, 둘이 동시에 0이 되는 것은 $x + \gamma = 0$이고 $R = 1$일 때뿐이다. 따라서 두 곡선이 접할 필요충분조건은

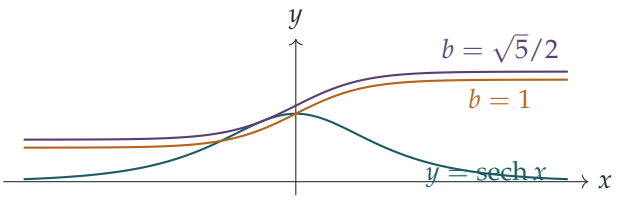
$$b > a \quad \text{그리고} \quad b^2 - a^2 = 1, \qquad \text{즉} \quad b = \sqrt{1+a^2}.$$

접점의 x좌표는 $x = -\gamma = -\operatorname{artanh}(a/b)$이므로

$$y = \operatorname{sech}\left(\operatorname{artanh}\tfrac{a}{b}\right) = \sqrt{1-\tfrac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b} = \frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}},$$

이다. 여기서 $\operatorname{sech}^2 u = 1 - \tanh^2 u$와 $\operatorname{sech} u > 0$을 이용했다. 검산으로, 다른 곡선에서도 $y = -a\cdot\frac{a}{b} + b = \frac{b^2-a^2}{b} = \frac{1}{b}$를 얻는다.

아래 그림은 $a = \frac{1}{2}$인 경우이다. $b = 1$(호박색)이면 교점이 두 개이고, $b = \sqrt{5}/2$(자주색)이면 두 곡선이 높이 $2/\sqrt{5}$에서 접한다.



검산

$a = \frac{3}{4}$, $b = 1$로 잡으면 $b^2 - a^2 = \frac{7}{16} < 1$이므로 (iii)에 따르면 교점이 두 개이다. 이때 $\operatorname{arcosh}(4/\sqrt{7}) = \ln\big((4+3)/\sqrt{7}\big) = \ln\sqrt{7}$이고 $\operatorname{artanh}\frac{3}{4} = \frac{1}{2}\ln 7 = \ln\sqrt{7}$이므로, (i)의 공식은 $x = 0$과 $x = -\ln 7 \approx -1.946$을 준다. $x = 0$에서 두 곡선은 예상대로 모두 $(0, 1)$을 지난다. 또한 무작위로 고른 많은 a, b에 대해 $(*)$를 컴퓨터로 확인한 결과, 모든 경우에 근의 개수가 맞았고 접할 조건에서 중근이 생기는 것도 확인되었다.

흔한 실수

- 경계인 경우 $b = \pm a$를 빠뜨리는 것. 이때는 cosh 꼴도 sinh 꼴도 존재하지 않고, 식이 하나의 지수함수가 된다.
- (iii)에서 $b^2 - a^2 < 1$만 쓰고 $b > a$를 빠뜨리는 것. $b < a$이면 두 곡선은 여전히 만나지만 한 번만 만난다.
- γ의 부호를 틀리는 것. 해는 $\pm\operatorname{arcosh}(\cdot)$에서 $\operatorname{artanh}(a/b)$를 뺀 것이다.

STEP 너머

경우의 구분은 $B^2 - A^2$의 부호가 결정한다. 점 (A, B)는 직선 $B = \pm A$로 나뉜 영역 중 하나의 내부에 있거나, 그 직선 위에 있다. 이것은 특수 상대성 이론(special relativity)의 기하학이다. 거기서 로런츠 부스트(Lorentz boost)는 보통의 회전이 $x^2 + y^2$을 보존하듯 $t^2 - x^2$을 보존하는 쌍곡적 "회전"이며, $B = \pm A$는 광원뿔(light cone), 즉 부스트로는 결코 넘어갈 수 없는 유일한 경계의 역할을 한다. 쌍곡선함수와 이런 종류의 문제를 더 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.