풀이

STEP III 2016, 문제 4

순수수학 • 망원급수

> **STEP III 2016, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q4

핵심 아이디어

문제에서 제시한 두 분수의 차는 일반항의 상수배가 되므로, 이 합은 망원급수(telescoping sum)처럼 정리된다. 즉 거의 모든 항이 소거되고 처음과 마지막 조각만 남는다. 소문항 (ii)에서는 sech를 지수함수로 나타내고 인수 하나를 밖으로 빼내면, 각 항이 $x = \mathrm{e}^{-2y}$일 때의 소문항 (i)의 항과 정확히 같은 꼴이 된다. 그다음 sech가 우함수(even function)이므로, 양쪽으로 무한한 합은 한쪽으로만 무한한 합으로 되접힌다.

풀이

소문항 (i)

제시된 차를 통분(common denominator)하면

$$\frac{1}{1+x^r} - \frac{1}{1+x^{r+1}} = \frac{x^{r+1}-x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})} = (x-1)\,\frac{x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})}.$$

$|x| \neq 1$이므로 $x \neq 1$이고, 따라서 $x-1$로 나눌 수 있다. (이 조건은 $x \neq -1$도 보장하므로 분모 $1+x^r$가 0이 되는 일은 없다. $x^r = -1$이면 $|x| = 1$이어야 하기 때문이다.) 따라서

$$\frac{x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})} = \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{1+x^r} - \frac{1}{1+x^{r+1}}\right).$$

$r = 1$부터 N까지 더하면 각 괄호의 두 번째 분수가 다음 괄호의 첫 번째 분수와 소거되어

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{N} \frac{x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})} &= \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x^{N+1}}\right)\\ &= \frac{x\,(x^N-1)}{(x-1)(1+x)(1+x^{N+1})},\end{aligned}$$

만 남는다. 여기서 두 번째 꼴은 두 분수를 하나로 합쳐서 얻은 것이다. 분자는 $x^{N+1} - x = x(x^N - 1)$이다.

이제 $|x| < 1$이라고 하자. 그러면 $N \to \infty$일 때 $x^{N+1} \to 0$이므로 부분합(partial sum)은

$$\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{1+x} - 1\right) = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{-x}{1+x} = \frac{x}{1-x^2},$$

로 수렴(converge)하고, 이것이 구하는 무한급수의 값이다.

소문항 (ii)

임의의 실수 t에 대하여

$$\operatorname{sech} t = \frac{2}{e^t + e^{-t}} = \frac{2e^{-t}}{1 + e^{-2t}}.$$

$x = e^{-2y}$로 놓자. $y > 0$이므로 $0 < x < 1$이다. 그러면 $\operatorname{sech}(ry) = 2e^{-ry}/(1 + x^r)$이고,

$$\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y) = \frac{4\,e^{-(2r+1)y}}{(1+x^r)(1+x^{r+1})} = 4e^{-y}\,\frac{x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})},$$

이다. $e^{-2ry} = x^r$이기 때문이다.

> **생각해 보기** 왜 $e^{-(2r+1)y}$를 $e^{-y} \cdot e^{-2ry}$로 나누는가?

분자가 분모에 나타나는 것과 같은 x의 거듭제곱인 x^r가 되어야 소문항 (i)을 항별로 적용할 수 있기 때문이다. 남는 인수 e^{-y}는 r에 의존하지 않으므로 합의 밖으로 나온다.

$|x| < 1$이므로 소문항 (i)에 의해

$$\sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y) = 4e^{-y}\,\frac{x}{1-x^2} = \frac{4e^{-y}}{x^{-1} - x} = \frac{4e^{-y}}{e^{2y} - e^{-2y}} = \frac{4e^{-y}}{2\sinh 2y},$$

이고, 이는 요구한 대로 $2e^{-y}\operatorname{cosech}(2y)$이다. 이 합을 S라 하자.

양쪽으로 무한한 합

모든 정수 r에 대한 합을 $r \geq 1$, $r \in \{-1, 0\}$, $r \leq -2$의 세 부분으로 나눈다.

> **생각해 보기** r가 음수인 항은 어떤 모양인가?

$r \leq -2$일 때 $s = -r - 1$로 놓으면 $s \geq 1$이고 $r + 1 = -s$, $r = -(s+1)$이다. sech는 우함수이므로

$$\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y) = \operatorname{sech}((s+1)y)\operatorname{sech}(sy),$$

이고, r가 $-2, -3, \ldots$을 지날 때 s는 $1, 2, \ldots$을 지난다. 따라서 $r \leq -2$인 항들의 합도 S이다. (한쪽으로 무한한 두 합이 모두 수렴하므로, 양쪽으로 무한한 합을 이렇게 나누는 것은 정당하다.)

가운데 두 항은

$$r=-1:\ \operatorname{sech}(-y)\operatorname{sech}0=\operatorname{sech}y,\qquad r=0:\ \operatorname{sech}0\operatorname{sech}y=\operatorname{sech}y.$$

이다. 따라서 $\sinh 2y=2\sinh y\cosh y$를 이용하면

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty}\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y)=2S+2\operatorname{sech}y=\frac{2\mathrm{e}^{-y}}{\sinh y\cosh y}+\frac{2\sinh y}{\sinh y\cosh y}$$
$$=\frac{2(\mathrm{e}^{-y}+\sinh y)}{\sinh y\cosh y}.$$

그런데 $\mathrm{e}^{-y}+\sinh y=\mathrm{e}^{-y}+\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y})=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y})=\cosh y$이므로 $\cosh y$가 약분되어

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty}\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y)=\frac{2}{\sinh y}=2\operatorname{cosech}y.$$

검산

- $N=1$이면 유한합 공식은 $\dfrac{x(x-1)}{(x-1)(1+x)(1+x^2)}=\dfrac{x}{(1+x)(1+x^2)}$를 주는데, 이는 $r=1$인 항 하나와 같다.
- $x=\frac{1}{2}$이면 무한급수의 값은 $\frac{1/2}{3/4}=\frac{2}{3}$이어야 하고, 실제로 부분합은 0.6667에 가까워진다.
- $y=1$이면 $2\mathrm{e}^{-1}\operatorname{cosech}2\approx 0.202864$이고 $2\operatorname{cosech}1\approx 1.701836$이며, 둘 다 급수를 직접 더한 값과 소수점 아래 여러 자리까지 일치한다(여러 y 값에 대해 컴퓨터로 확인하였다).
- $y\to\infty$이면 $r=-1,0$인 항만 남고 각각 약 $2\mathrm{e}^{-y}$이므로 합은 약 $4\mathrm{e}^{-y}$이다. 한편 $2\operatorname{cosech}y\approx 4\mathrm{e}^{-y}$이기도 하다.

흔한 실수

- 인수 $\frac{1}{x-1}$을 빠뜨리거나 부호를 틀리는 것. 차는 항의 $(x-1)$배이지 $(1-x)$배가 아니다.
- 양쪽으로 무한한 합에서 S를 두 배 하고 $r=-1$과 $r=0$인 두 항을 빠뜨리는 것. 이 두 항은 $\operatorname{sech}0=1$을 포함하며, 어느 쪽의 한쪽 합에도 속하지 않는다.

STEP 너머

여기서 무한급수의 순서를 바꾸고 나누어도 괜찮은 것은 모든 항이 양수이기 때문이다(급수가 절대수렴(absolute convergence)한다). 조건수렴(conditional convergence)하는 급

수에 대해서는 리만(Riemann)의 재배열 정리(rearrangement theorem)가 말해 주듯이, 순서를 바꾸면 합을 원하는 어떤 값으로도 바꿀 수 있다. 이는 처음 배우는 해석학(analysis) 강의에서 만나는 놀라운 결과이다. $\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y)$와 같은 곱을 모든 정수에 대해 더한 합은 타원함수(elliptic function) 이론에도 등장하는데, 그곳에서 이러한 양방향 급수(bilateral series)는 아름다운 닫힌 꼴을 가진다. 급수의 해석학에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.