풀이

STEP III 2016, 문제 3

순수수학 • 적분과 다항식

> **STEP III 2016, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q3

이 문제는 *Beyond STEP*의 4.6 절 **공식으로 나타낼 수 없는 적분**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/no-formula.html

핵심 아이디어

$\int g(x)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{P}{Q}\,\mathrm{e}^x + \text{상수}$ 꼴의 등식은 결국 도함수(derivative)에 관한 명제일 뿐이다. 따라서 우변을 미분하고 분모를 없앤다. 그러면 문제는 다항식 항등식(polynomial identity)으로 바뀌고, 다항식 항등식은 두 가지 방법으로 공략할 수 있다. 하나는 잘 고른 값(여기서는 $x=-1$)을 대입하는 것이고, 다른 하나는 차수(degree)를 비교하는 것이다.

풀이

이 풀이 전체에서 $P(x)$, $Q(x)$를 P, Q로 쓴다. 몫의 미분법(quotient rule)과 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{P}{Q}\,\mathrm{e}^x\right) = \frac{PQ + P'Q - PQ'}{Q^2}\,\mathrm{e}^x.$$

따라서 주어진 적분 등식은 이 식이 피적분함수(integrand)와 같을 때, 그리고 그때에만 성립한다(단, Q는 영다항식이 아니다).

소문항 (i)

도함수를 $\frac{x^3-2}{(x+1)^2}\,\mathrm{e}^x$와 같다고 놓고, $\mathrm{e}^x \neq 0$을 약분한 뒤 분모를 곱해 없애면 다항식 항등식

$$(x+1)^2\left(PQ + P'Q - PQ'\right) = \left(x^3-2\right)Q^2. \qquad (*)$$

을 얻는다.

Q는 인수 $x+1$을 가진다. $(*)$에 $x=-1$을 대입한다. 좌변은 0이고, 우변은 $-3\,Q(-1)^2$이다. 따라서 $Q(-1)=0$이고, 인수정리(factor theorem)에 의해 $x+1$은 Q를 나눈다.

차수. P는 영다항식이 아니다. 만약 그렇다면 도함수가 피적분함수가 아니라 0이 되기 때문이다. $\deg P = p$, $\deg Q = q$라 하고, 최고차항 계수(leading coefficient)를 각각 $a \neq 0$, $b \neq 0$이라 하자. $PQ + P'Q - PQ'$에서 항 PQ는 차수가 $p+q$이고 최고차항 계수가 ab인 반면, $P'Q$와 PQ'는 각각 차수가 많아야 $p+q-1$이다. 따라서 $PQ + P'Q - PQ'$의 차수는 정확히 $p+q$이고, $(*)$의 좌변의 차수는 $p+q+2$이다. 우변의 차수는 $3+2q$이다. 그러므로

$$p+q+2 = 2q+3 \quad \Longrightarrow \quad p = q+1,$$

즉 P의 차수는 Q의 차수보다 정확히 1만큼 크다.

$Q = x+1$인 경우. 이제 P의 차수는 2이므로 $P = ax^2+bx+c$라 하자. $Q = x+1$, $Q' = 1$이므로 $(*)$는

$$(x+1)^2\big((x+1)P + (x+1)P' - P\big) = (x^3-2)(x+1)^2,$$

이 되고, $(x+1)^2$을 약분하면

$$xP + (x+1)P' = x^3 - 2.$$

를 얻는다. $xP = ax^3+bx^2+cx$이고 $(x+1)P' = (x+1)(2ax+b) = 2ax^2 + (2a+b)x + b$이므로

$$ax^3 + (2a+b)x^2 + (2a+b+c)x + b = x^3 - 2.$$

계수를 비교(comparing coefficients)하면 $a=1$이다. 상수항에서 $b=-2$이고, 그러면 x^2항의 조건 $2a+b=0$도 모순 없이 성립하며, x항에서 $c = -(2a+b) = 0$이다. 따라서

$$P(x) = x^2 - 2x, \qquad \int \frac{x^3-2}{(x+1)^2}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2-2x}{x+1}\,\mathrm{e}^x + \text{상수}.$$

소문항 (ii)

모순(contradiction)을 이끌어 내기 위해, 공통인수(common factor)가 없는 그러한 P와 Q가 존재한다고 가정하자. 앞에서와 마찬가지로 미분하고 분모를 없애면

$$(x+1)\big(PQ + P'Q - PQ'\big) = Q^2. \qquad (**)$$

를 얻는다. $x=-1$을 대입하면 $Q(-1)^2 = 0$이므로 $x+1$은 Q를 나눈다.

$$Q = (x+1)^n R, \qquad n \geq 1, \quad R(-1) \neq 0,$$

으로 쓰자. 즉 n은 Q에 들어 있는 $x+1$의 정확한 거듭제곱 지수이다. 그러면 $Q' = n(x+1)^{n-1}R + (x+1)^n R'$이고,

$$\begin{aligned} PQ + P'Q - PQ' &= (x+1)^n\big(PR + P'R - PR'\big) - n(x+1)^{n-1}PR \\ &= (x+1)^{n-1}\Big[(x+1)\big(PR + P'R - PR'\big) - nPR\Big]. \end{aligned}$$

이를 $(**)$에 대입하고 양변에서 공통인수 $(x+1)^n$을 약분하면(우변은 $(x+1)^{2n}R^2$이다)

$$(x+1)\big(PR + P'R - PR'\big) - nPR = (x+1)^n R^2.$$

> **생각해 보기** $(**)$에 $x=-1$을 다시 대입하는 대신, 굳이 $x+1$의 정확한 거듭제곱을 뽑아내는 수고를 하는 이유는 무엇일까?

$(**)$에 $x=-1$을 곧바로 대입하면 $Q(-1)=0$이라는 사실만 알 수 있다. 그러고 나면 모든 항이 사라져 P에 대해서는 아무것도 알 수 없다. Q에서 $x+1$ 인수를 모두 제거하면, $x=-1$에서 저절로 사라지지 **않는** 항 $-nPR$이 남는다.

이제 $x=-1$을 대입한다. $n \geq 1$이므로 우변은 0이고, 좌변의 첫째 항도 마찬가지이다. 따라서

$$-n\,P(-1)\,R(-1) = 0.$$

그런데 $n \neq 0$이고 $R(-1) \neq 0$이므로 $P(-1)=0$이다. 그러면 $x+1$은 Q뿐 아니라 P의 인수이기도 하므로, 둘이 공통인수를 갖지 않는다는 가정에 모순이다. 따라서 그러한 다항식은 존재하지 않는다. ■

(서로소(coprime)인 P, Q로 제한해도 잃는 것은 없다. 공통인수가 있다면 함수를 바꾸지 않고 P/Q에서 약분해 버리면 되기 때문이다.)

검산

- (i)의 답을 직접 미분해 보자. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2-2x}{x+1}\right) = \frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$이고, 여기에 $\frac{x^2-2x}{x+1} = \frac{x^3-x^2-2x}{(x+1)^2}$를 더하면 요구한 대로 $\frac{x^3-2}{(x+1)^2}$를 얻는다.
- 수치적으로 $\int_0^1 \frac{x^3-2}{(x+1)^2}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \approx -1.359141$이고, 이는 $\left[\frac{x^2-2x}{x+1}\mathrm{e}^x\right]_0^1 = -\frac{\mathrm{e}}{2}$와 일치한다.
- (i)에서 차수도 맞는다. P의 차수는 2로, $Q=x+1$의 차수보다 1만큼 크다.

흔한 실수

- 최고차항이 상쇄되기 때문에 $P'Q - PQ'$의 차수가 $p+q$보다 **작다**는 사실을 잊는 것. 차수를 결정하는 것은 PQ 하나뿐이다.

- (ii)에서 $(**)$에 $x = -1$만 대입하고 $Q(-1) = 0$을 얻은 데서 멈추는 것. 모순을 얻으려면 Q에 들어 있는 $x + 1$의 정확한 거듭제곱이 필요하다.

STEP 너머

소문항 (ii)는 본질적으로 지수적분(exponential integral) Ei인 $\int \frac{e^x}{x+1}\,\mathrm{d}x$가 이 제한된 의미에서 "초등적(elementary)"이지 않다는 것을 말해 준다. 어떤 적분을 초등함수로 나타낼 수 있는지 없는지를 판정하는 완전한 이론은 미분대수(differential algebra)의 리우빌(Liouville) 정리와 Risch 알고리즘(Risch algorithm)이며, 여기서의 논증은 그 작은 사례이다. 위에서 사용한 다항식 대수(인수정리, 나누어떨어짐, 서로소)를 꼼꼼하게 다룬 책으로는 Allenby, *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.