풀이

STEP III 2016, 문제 2

순수수학 • 포물선의 법선

> **STEP III 2016, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q2

핵심 아이디어

일반적인 점 $(at^2, 2at)$에서의 법선(normal)을 쓰고, 어떤 t의 값에 대해 그 법선이 P를 지나는지 묻는다. 이 조건은 t에 대한 삼차식(cubic)이 되고, 그 한 근(root) $t = p$는 언제나 존재한다(P에서의 법선은 P를 지난다). 이 근을 제거하면 이차방정식(quadratic)이 남는데, 그 두 근이 바로 q와 r이다. 그 뒤로는 모든 것이 두 근의 합과 곱, 즉 $q + r$와 qr에 의해 결정된다.

풀이

소문항 (i)

$y^2 = 4ax$ 위에서 $x = at^2, y = 2at$라 하면 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2a}{2at} = \dfrac{1}{t}$이므로, 매개변수(parameter) t인 점에서의 법선의 기울기(gradient)는 $-t$이다.

$$y - 2at = -t\,(x - at^2), \qquad \text{즉} \qquad y + tx = 2at + at^3.$$

(이 형태는 법선이 x축이 되는 꼭짓점(vertex) $t = 0$의 경우도 포함한다.)

t에서의 법선이 $P(ap^2, 2ap)$를 지날 필요충분조건은

$$2ap + tap^2 = 2at + at^3$$

이다. $a > 0$으로 나누고 정리하면

$$\begin{aligned} 0 &= 2(p - t) + t(p^2 - t^2) \\ &= (p - t)(2 + t(p + t)) \\ &= (p - t)\,(t^2 + pt + 2). \end{aligned}$$

생각해 보기 왜 인수 $p-t$를 버려도 되는가?

근 $t=p$는 자명한 근이다. P 자신에서의 법선은 P를 지나기 때문이다. 문제에서 $Q\neq P$라 했으므로 $q\neq p$이고, 따라서 인수 $p-q$는 0이 아니다. 그러므로

$$q^2+qp+2=0$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 같은 논법으로 $r^2+rp+2=0$이다.

소문항 (ii)

따라서 q와 r는 모두 $t^2+pt+2=0$의 근이다. $Q\neq R$이므로 $q\neq r$이고, 따라서 이들이 이 방정식의 두 근이며

$$q+r=-p,\qquad qr=2.$$

(특히 판별식(discriminant)은 양수이다: $p^2>8$. 또한 $q=p$이려면 $2p^2+2=0$이어야 하는데 이는 불가능하므로, Q와 R는 자동으로 P와 다르다.)

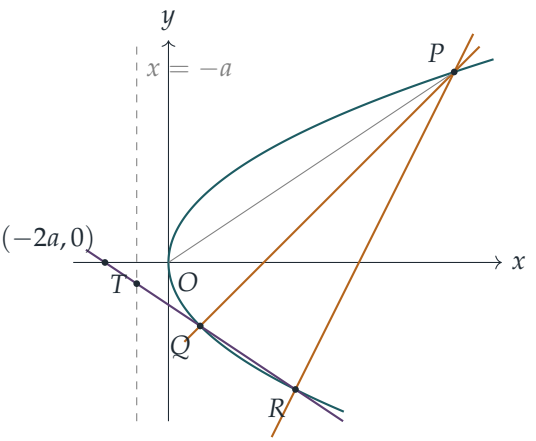
$(aq^2,2aq)$와 $(ar^2,2ar)$를 지나는 현(chord)의 기울기는 $\dfrac{2a(q-r)}{a(q^2-r^2)}=\dfrac{2}{q+r}$이고, 그 방정식은

$$(q+r)\,y=2x+2aqr$$

이다. (확인: Q에서 좌변은 $2aq^2+2aqr$이고 이는 우변과 같다. R에서도 마찬가지이다.) $q+r=-p$와 $qr=2$를 대입하면

$$-p\,y=2x+4a.$$

p의 값이 무엇이든 점 $(-2a,0)$은 이 방정식을 만족한다. 따라서 QR는 언제나 $(-2a,0)$을 지나며, 이 점은 P의 선택에 의존하지 않는다.



그림은 $a = 1$, $p = 3$인 경우로, 이때 $q = -1$, $r = -2$이다. 두 법선(호박색)은 P에서 만나고, 현 QR(자주색)는 $(-2, 0)$을 지나며, T는 점선 $x = -1$ 위에 있다.

소문항 (iii)

$p^2 > 8$이므로 $p \neq 0$이고, 따라서 $P \neq O$이며 직선 OP는 $y = \dfrac{2ap}{ap^2}\,x = \dfrac{2}{p}\,x$, 즉 $x = \frac{1}{2}py$이다. (이 직선은 기울기가 $-2/p$인 QR와 평행하지 않다.)

$x = \frac{1}{2}py$를 QR의 방정식에 대입하면

$$-py = py + 4a \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{2a}{p}, \qquad x = \tfrac{1}{2}p\left(-\frac{2a}{p}\right) = -a.$$

따라서 $T = (-a, -\frac{2a}{p})$이고, 이 점은 P의 선택과 무관하게 언제나 직선 $x = -a$(포물선(parabola)의 준선(directrix)) 위에 있다.

x축에서 T까지의 거리는 $\dfrac{2a}{|p|}$이다. 소문항 (ii)에서 P를 지나는 서로 다른 두 법선이 존재한다는 사실로부터 $p^2 > 8$, 즉 $|p| > 2\sqrt{2}$이다. $a > 0$이므로

$$\frac{2a}{|p|} < \frac{2a}{2\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

이고, 이로써 증명이 끝난다. $p^2 = 8$이면 $q = r$가 되므로 부등식은 등호 없이 성립한다.

검산

- 그림의 경우 $a = 1$, $p = 3$에서: $t^2 + 3t + 2$의 근은 -1과 -2이다. 법선 $y = x - 3$과 $y = 2x - 12$는 모두 $P(9, 6)$을 지난다. $(1, -2)$와 $(4, -4)$를 지나는 현은 $-3y = 2x + 4$이고, 이는 $(-2, 0)$을 지난다. 그리고 $T = (-1, -\frac{2}{3})$이며 $\frac{2}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$이다.
- $|p| \to 2\sqrt{2}$로 위에서부터 접근시키면 Q와 R가 합쳐지고 T의 높이는 $a/\sqrt{2}$에 수렴하므로, 이 상계는 최선이다. 무작위로 고른 20,000개의 a, p 값에 대해 컴퓨터로 확인한 결과 모든 결과가 성립했으며, T의 높이는 $a/\sqrt{2}$의 0.9996배까지 도달했지만 이를 넘지는 않았다.

흔한 실수

- $p - q$로 나누는 것을 정당화하지 않는 것. 이를 가능하게 하는 것은 조건 $Q \neq P$이다.
- $q \neq r$를 이용해 q와 r가 같은 이차방정식의 두 근임을 말하지 않는 것. 바로 이것이 $q + r = -p$와 $qr = 2$를 준다.
- $p^2 > 8$이 어디서 나오는지 말하지 않고 마지막 상계를 증명하는 것. 이는 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다는 조건에서 나온다.

STEP 너머

소문항 (i)의 바탕에 있는 t에 대한 삼차식은 고전적인 사실의 특수한 경우이다. 일반적인 점 (h,k)에 대해 조건은 $at^3+(2a-h)\,t-k=0$이므로, 평면 위의 한 점에서 포물선에 그을 수 있는 법선은 최대 세 개이고, "법선이 하나"인 영역과 "법선이 셋"인 영역의 경계는 **축폐선**(evolute)이라 불리는 곡선(여기서는 반삼차 포물선(semicubical parabola))이다. 축폐선, 포락선(envelope), 곡률(curvature)은 곡선의 미분기하학(differential geometry) 첫 강좌에서 다루는 표준적인 주제이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 이런 좌표기하 스타일의 STEP 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.