풀이

STEP III 2016, 문제 11

역학 • 일률과 저항

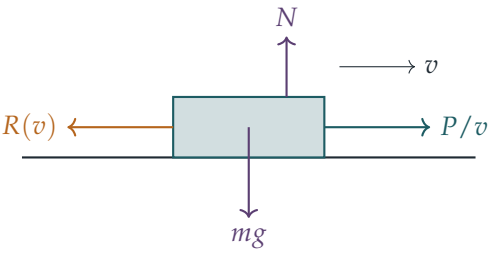
> **STEP III 2016, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q11

핵심 아이디어

일정한 일률(power) P로 작동하는 엔진은 속력 v에서 P/v의 구동력(driving force)을 낸다. 우리가 원하는 것은 시간이 아니라 속력의 함수로서의 **거리**이므로, 가속도(acceleration)를 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$로 쓴다. 그러면 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙(Newton's second law)이 v에 대한 x의 변수분리형 방정식(separable equation)이 된다. 속력 $4U$에서 가속도가 0이 된다는 사실로부터 저항(resistance) 상수가 P와 U로 결정되고, 그러면 각 거리는 정적분(definite integral) 하나로 귀결된다.

풀이

자동차를 수평 직선 위를 움직이는 질량 m인 입자로 모형화하고, 앞쪽으로 견인력(tractive force) P/v, 뒤쪽으로 저항 $R(v)$가 작용한다고 하자. 연직 방향으로는 무게와 수직항력(normal reaction)이 평형을 이루므로 더 이상 고려하지 않는다.



$a = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$를 이용하면 수평 방향의 운동 방정식(equation of motion)은 다음과 같다.

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{P}{v} - R(v), \qquad \text{따라서} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v} = \frac{mv^2}{P - vR(v)}.$$

두 모형 모두에서 $vR(v)$는 v에 대해 증가하고 $v = 4U$에서 P와 같다. 그러므로 $U \le v \le 2U$에서 분모는 양수이고, 자동차는 그 구간 내내 실제로 가속한다. 즉 x는 v에 대해 증가하며, 거리는 다음과 같다.

$$X = \int_U^{2U} \frac{mv^2}{P - vR(v)}\,\mathrm{d}v.$$

소문항 (i)

$R = kv$라 하자. $4U$에서 가속도가 0이므로 $\dfrac{P}{4U} = 4kU$이고, 따라서 $k = \dfrac{P}{16U^2}$이다. 그러면

$$P - kv^2 = k\,(16U^2 - v^2), \qquad \frac{m}{k} = \frac{16mU^2}{P} = \frac{1}{\lambda U}.$$

그러므로 $v = Uw$로 치환하면

$$\lambda X_1 = \frac{1}{U}\int_U^{2U} \frac{v^2}{16U^2 - v^2}\,\mathrm{d}v = \int_1^2 \frac{w^2}{16 - w^2}\,\mathrm{d}w,$$

이다. $\dfrac{w^2}{16 - w^2} = -1 + \dfrac{16}{16 - w^2} = -1 + \dfrac{2}{4 - w} + \dfrac{2}{4 + w}$로 쓰면

$$\begin{aligned}\lambda X_1 &= \Big[-w + 2\ln\frac{4 + w}{4 - w}\Big]_1^2 \\ &= -1 + 2\ln 3 - 2\ln\tfrac{5}{3} = 2\ln\tfrac{9}{5} - 1,\end{aligned}$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

이제 $R = cv^2$라 하자. $4U$에서 가속도가 0이므로 $\dfrac{P}{4U} = 16cU^2$이고, 따라서 $c = \dfrac{P}{64U^3}$이다. 그러면

$$P - cv^3 = c\,(64U^3 - v^3), \qquad \frac{m}{c} = \frac{64mU^3}{P} = \frac{4}{\lambda}.$$

> ? **생각해 보기** 여기에 깔끔한 역도함수(antiderivative)가 있을까, 아니면 다시 부분분수(partial fractions)가 필요할까?

분자 v^2는 상수배를 제외하면 분모 $64U^3 - v^3$의 도함수이다. 따라서 이 적분은 곧바로 로그가 된다.

$$\begin{aligned}\lambda X_2 &= 4\int_U^{2U} \frac{v^2}{64U^3 - v^3}\,\mathrm{d}v = 4\Big[-\tfrac{1}{3}\ln(64U^3 - v^3)\Big]_U^{2U} \\ &= \tfrac{4}{3}\ln\frac{63U^3}{56U^3} = \tfrac{4}{3}\ln\tfrac{9}{8},\end{aligned}$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

소문항 (iii)

$\lambda > 0$이므로 $X_1 > X_2$인 것은 정확히 $\lambda X_1 - \lambda X_2 > 0$일 때이다. 주어진 것은 $\ln 24$와 $\ln 5$에 대한 범위뿐이므로, 차를 이 둘로 다시 쓴다.

$$\begin{aligned}\lambda(X_1 - X_2) &= 2\ln 9 - 2\ln 5 - 1 - \tfrac{4}{3}\ln 9 + \tfrac{4}{3}\ln 8 \\ &= \tfrac{4}{3}\ln 3 + 4\ln 2 - 2\ln 5 - 1 \\ &= \tfrac{4}{3}(\ln 3 + 3\ln 2) - 2\ln 5 - 1 = \tfrac{4}{3}\ln 24 - 2\ln 5 - 1.\end{aligned}$$

? **생각해 보기** 각 범위를 어느 방향으로 사용해야 할까?

차가 양수임을 보이려면 **하계**(lower bound)가 필요하다. 따라서 (더하기 부호로 나타나는) $\ln 24$에는 하계를, (빼기 부호로 나타나는) $\ln 5$에는 상계(upper bound)를 사용한다.

$$\lambda(X_1 - X_2) > \tfrac{4}{3}(3.17) - 2(1.61) - 1 = 4.22\dot{6} - 3.22 - 1 = 0.00\dot{6} > 0.$$

그러므로 $X_1 > X_2$이다. 즉 자동차가 U에서 $2U$까지 가속하는 동안, 저항이 속력에 비례할 때가 속력의 제곱에 비례할 때보다 더 먼 거리를 이동한다.

이는 물리적으로도 타당하다. 두 저항은 $v = 4U$에서 일치하지만, $v < 4U$에서는 $cv^2 = kv \cdot \frac{v}{4U} < kv$이다. 따라서 해당 속력 범위에서 제곱 법칙의 저항이 **더 작고**, 자동차는 더 세게 가속하여 $2U$에 더 빨리 도달한다.

검산

- 수치적으로 $\lambda X_1 = 2\ln 1.8 - 1 \approx 0.1756$이고 $\lambda X_2 = \frac{4}{3}\ln 1.125 \approx 0.1570$이므로, 차는 약 0.0185로 앞에서 구한 대로 양수이다. $v = U$에서 시작하여 운동 방정식을 시간에 따라 단계적으로 계산하는 컴퓨터 시뮬레이션도 두 값을 소수점 아래 다섯째 자리까지 재현한다.
- 단위: $P/(mU^3)$의 단위는 $\mathrm{W}/(\mathrm{kg\,m^3\,s^{-3}}) = \mathrm{m^{-1}}$이므로, λX는 마땅히 그래야 하듯 무차원(dimensionless)이다.
- 소문항 (iii) 끝의 물리적 논증은 같은 대소 관계를 독립적으로 예측한다.

흔한 실수

- $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$를 사용하는 것. 이렇게 하면 거리가 아니라 시간을 얻는다. 여기서는 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$가 필요하다.
- 소문항 (iii)에서 범위를 거꾸로 사용하는 것. 3.18과 1.60을 사용하면 상계만 얻으므로 부호에 대해 아무것도 증명하지 못한다.

▶ 여유가 아주 작다는 것($0.00\dot{6}$)을 잊는 것. $\frac{4}{3}(3.17)$을 4.2로 반올림하면 결과를 잃는다.

STEP 너머

$a = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$로 쓰는 것은 대학 역학의 에너지 방법을 향한 첫걸음이다. 운동 방정식에 v를 곱하면 운동 에너지(kinetic energy)의 변화율을 얻는데, 이는 공급되는 일률에서 소산되는 일률을 뺀 것과 같다. 두 일률이 균형을 이루는 $4U$와 같은 속력은 1계 미분방정식(first-order differential equation)의 **평형점**(equilibria)이며, 해가 평형점에 어떻게 다가가는지를 연구하는 것이 동역학계(dynamical systems)의 시작이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 일, 일률, 속도에 의존하는 힘을 이러한 방식으로 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.