풀이

STEP III 2016, 문제 10

역학 • 평면 위의 원운동

> **STEP III 2016, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q10

핵심 아이디어

줄이 팽팽하고 입자가 평면 위에 머무는 동안 P는 항상 A로부터 거리 a만큼 떨어져 있고 평면 위에 있으므로, A에서 평면에 내린 수선의 발을 중심으로 하는 원을 **평면 위에서** 그리며 움직인다. 평면 안에서 보면 이것은 줄어든 중력 $g\sin\alpha$를 받는 연직 원운동일 뿐이다. 평면에 수직인 방향으로는 줄이 P를 면에서 떼어 내려고 당기므로, 수직항력(normal reaction)이 계속 양수여야 한다. 따라서 장력(tension)을 구하고, 수직항력을 구한 다음, 각각이 어디에서 가장 작아지는지 따져 본다.

풀이

상황 설정

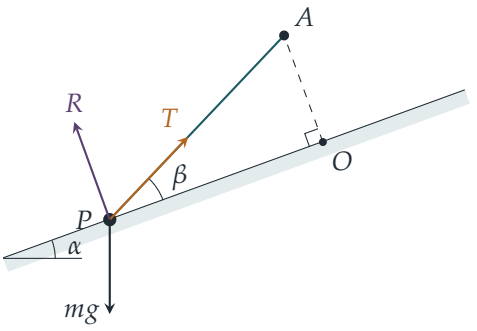
P를 입자로, 줄을 가볍고 늘어나지 않는(inextensible) 것으로, 평면을 매끄러운(smooth) 것으로 모형화한다. A에서 평면에 내린 수선의 발을 O라 하자. 줄의 길이가 a이고 줄이 평면과 이루는 각이 β이므로

$$AO = a\sin\beta, \qquad OP = a\cos\beta.$$

평형(equilibrium) 상태에서 중력 말고 평면 방향 성분을 갖는 힘은 장력뿐이므로, 줄은 최대경사선(line of greatest slope) 위에 놓여야 하고 P는 O에서 경사면 바로 아래쪽에 있다. 평면에 평행한 방향과 수직인 방향으로 힘을 분해하면(장력 T_0, 수직항력 R_0)

$$T_0\cos\beta = mg\sin\alpha, \qquad R_0 + T_0\sin\beta = mg\cos\alpha,$$

이므로 $R_0 = mg(\cos\alpha - \sin\alpha\tan\beta) = mg\cos(\alpha+\beta)/\cos\beta$이다. 따라서 애초에 평형이 존재하려면 $\cos(\alpha+\beta) > 0$이어야 한다.



그림은 처음 상태에서 최대경사선을 지나는 단면이다. AO는 평면에 수직이다.

충격량(impulse)이 가해진 뒤에도 줄이 팽팽하고 P가 평면 위에 있는 한 $AP = a$, $AO = a\sin\beta$이므로, 피타고라스(Pythagoras) 정리에 의해 항상 $OP = a\cos\beta$이다. 즉 P는 평면 위에서 O를 중심으로 하고 반지름이

$$r = a\cos\beta$$

인 원 위를 움직인다. 줄은 항상 평면과 각 β를 이루고, 줄을 평면에 정사영한 것은 P에서 O를 향한다. 충격량은 수평이면서 평면에 평행하므로, 이 원의 가장 낮은 점에서 원에 접한다.

O를 지나며 아래로 향하는 최대경사선과 OP가 이루는 각을 θ라 하여 처음에 $\theta = 0$이 되게 하고, 속력을 v라 하자. 무게는 경사면 아래 방향(평면 안)으로 성분 $mg\sin\alpha$를, 평면 안쪽으로 성분 $mg\cos\alpha$를 갖는다.

평면에 수직인 방향으로 P는 가속도가 없으므로

$$R + T\sin\beta = mg\cos\alpha. \tag{1}$$

평면 안에서 O를 향하는 방향으로 가속도는 v^2/r이다. 장력은 $T\cos\beta$만큼, 경사면 아래 방향의 무게 성분은 $-mg\sin\alpha\cos\theta$만큼 기여하므로

$$T\cos\beta - mg\sin\alpha\cos\theta = \frac{mv^2}{a\cos\beta}. \tag{2}$$

에너지(*energy*): 수직항력과 장력은 일을 하지 않으며(각각 속도에 수직이다), P는 경사면을 따라 거리 $r(1-\cos\theta)$만큼, 즉 높이로는 $r(1-\cos\theta)\sin\alpha$만큼 올라간다. 따라서

$$v^2 = u^2 - 2ga\cos\beta\sin\alpha\,(1-\cos\theta). \tag{3}$$

곧바로 평면을 떠나지 않을 조건

충격량을 가한 직후에는 $\theta = 0, v = u$이다. (2)에서 $T\cos\beta = mg\sin\alpha + \dfrac{mu^2}{a\cos\beta}$이고, 이를 (1)에 넣으면

$$\begin{aligned} R &= mg\cos\alpha - \tan\beta\left(mg\sin\alpha + \frac{mu^2}{a\cos\beta}\right) \\ &= \frac{m}{\cos\beta}\left(g\cos\alpha\cos\beta - g\sin\alpha\sin\beta\right) - \frac{mu^2\tan\beta}{a\cos\beta} \\ &= \frac{m}{a\cos\beta}\Big(ag\cos(\alpha+\beta) - u^2\tan\beta\Big). \end{aligned}$$

$\cos\beta > 0$이므로, 수직항력이 양수이고 따라서 입자가 곧바로 평면을 떠나지 않을 조건은

$$ag\cos(\alpha+\beta) > u^2\tan\beta,$$

이고, 이것이 보이려던 것이다.

완전한 원운동

이제 (3)을 (2)에 대입하여 일반적인 위치에서의 장력을 구하면

$$T\cos\beta = \frac{mu^2}{a\cos\beta} - 2mg\sin\alpha + 3mg\sin\alpha\cos\theta,$$

이고, 따라서 (1)에서

$$R = mg\cos\alpha - \tan\beta\left(\frac{mu^2}{a\cos\beta} - 2mg\sin\alpha + 3mg\sin\alpha\cos\theta\right).$$

생각해 보기 입자가 평면을 떠날 가능성이 가장 큰 곳은 원의 어디일까? 꼭대기일까, 바닥일까?

연직 원운동에서 얻은 직관으로는 "꼭대기"라고 답하고 싶지만, 여기서 꼭대기는 평면이 아니라 줄에게 위험한 지점이다. 줄은 힘 $T\sin\beta$로 P를 평면에서 떼어 내려고 당기는데, 장력은 바닥에서 가장 크다. 바닥에서 P가 가장 빠르게 움직이고, 평면 안의 중력도 O에서 멀어지는 쪽으로 당기기 때문이다. 실제로 R는 $\cos\theta$가 가장 클 때, 즉 $\theta = 0$에서 가장 작고, T는 $\cos\theta = -1$일 때, 즉 꼭대기에서 가장 작다. 따라서 평면에 닿은 채로 원을 한 바퀴 다 돌려면 두 가지가 필요하다.

- **바닥에서 접촉 유지.** $\theta = 0$에서 $R > 0$이어야 하며, 이는 정확히 앞 소문항의 조건 $u^2\tan\beta < ag\cos(\alpha+\beta)$이다.
- **꼭대기에서 줄이 팽팽함.** $\theta = \pi$에서 $T \geq 0$이어야 하므로 $\dfrac{u^2}{a\cos\beta} - 5g\sin\alpha \geq 0$, 즉 $u^2 \geq 5ag\sin\alpha\cos\beta$이다. (이때 (3)에 의해 꼭대기에서 $v^2 > 0$도 성립한다.)

두 번째 조건에 $\tan\beta > 0$을 곱하면, 두 조건이 동시에 성립할 수 있으려면

$$5ag\sin\alpha\cos\beta\tan\beta \le u^2\tan\beta < ag\cos(\alpha+\beta),$$

이어야 하고, 이는 곧

$$5\sin\alpha\sin\beta < \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \iff 6\sin\alpha\sin\beta < \cos\alpha\cos\beta.$$

양변을 $\cos\alpha\cos\beta > 0$으로 나누면 필요조건

$$6\tan\alpha\tan\beta < 1.$$

을 얻는다. (이 조건은 충분조건이기도 하다. 이 조건이 성립하면 $5ag\sin\alpha\cos\beta \le u^2 < ag\cos(\alpha+\beta)/\tan\beta$를 만족하는 어떤 u든 가능한데, 그때 원 위의 모든 곳에서 R와 T가 양수이기 때문이다.)

검산

- $u = 0$이면 첫 번째 소문항의 수직항력은 $mg\cos(\alpha+\beta)/\cos\beta$가 되어 평형 상태의 값 R_0와 일치한다.
- $\beta \to 0$이면(줄이 거의 평면을 따라 놓이면) 줄은 입자를 들어 올릴 수 없고, 조건 $6\tan\alpha\tan\beta < 1$은 당연히 그래야 하듯 저절로 성립한다.
- $\alpha = 30°$, $\beta = 5°$(따라서 $6\tan\alpha\tan\beta \approx 0.30$), $a = 1\,\mathrm{m}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$로 두면 허용 범위는 $24.4 \le u^2 < 91.8$(단위 $\mathrm{m^2\,s^{-2}}$)이다. $u^2 = 50$으로 잡으면 바닥에서 가장 작은 수직항력은 약 $0.37mg$, 꼭대기에서 가장 작은 장력은 약 $2.63mg$이다. 원 전체에 걸쳐 3차원에서 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 컴퓨터로 풀어, R와 T가 위의 값들을 가지며 계속 양수로 유지됨을 확인하였다.

흔한 실수

- 줄의 전체 길이 a를 원의 반지름으로 쓰는 것. 반지름은 $a\cos\beta$이다.
- 입자가 원의 꼭대기에서 평면을 떠날 가능성이 가장 크다고 가정하는 것. 수직항력은 바닥에서 가장 작다.
- 에너지 방정식에서 $g\sin\alpha$ 대신 g를 쓰는 것. 입자가 연직으로 올라가는 높이는 $r(1-\cos\theta)\sin\alpha$뿐이다.

STEP 너머

이것은 구속 조건(constraint) 아래에서의 운동이다. 평면과 줄은 각각 구속 조건을 유지하는 데 필요한 만큼의 크기를 갖는 반작용력을 제공하며, 운동은 그 힘들의 부호가 올바른 동안에만 유효하다. 대학 1학년 과정에서는 이를 체계적으로 다루는 법을 배우는데, 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)을 이용해 구속 조건을 제거한 뒤 나중에 반작용력을 되찾는다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에는 바로 이런 "언제 접촉을 잃는가?" 유형의 문제가 많이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.