풀이

STEP III 2016, 문제 1

순수수학 • 점화 공식

STEP III 2016, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/16-s3-q1

핵심 아이디어

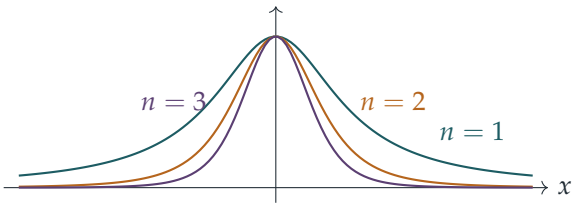
완전제곱식으로 고치기(completing the square)를 하면 이차식은 $(x+a)^2+c^2$ 꼴이 되고, 여기서 $c^2 = b-a^2 > 0$이다. 그러면 탄젠트 치환(substitution)으로 I_1을 곧바로 구할 수 있다. 점화식(reduction formula)을 얻는 요령은 1과 짝지어 부분적분(integration by parts)하는 것이다. $(x^2+2ax+b)^{-n}$을 미분하면 지수가 $n+1$로 올라가는데, 이것이 바로 I_n과 I_{n+1}을 연결하는 데 필요한 것이다. 그다음 귀납법(induction)은 이항계수(binomial coefficient)를 정리하는 일에 지나지 않는다.

풀이

이 풀이 전체에서 다음과 같이 쓴다.

$$Q(x) = x^2+2ax+b = (x+a)^2+c^2, \qquad c = \sqrt{b-a^2} > 0.$$

모든 x에 대하여 $Q(x) \geq c^2 > 0$이므로 피적분함수(integrand)는 연속이고, $Q(x)^n$은 x^{2n}처럼 커지며 $2n \geq 2$이므로 모든 I_n은 수렴(converge)한다.



$a=0, b=1$일 때의 피적분함수 $1/Q^n$이다. n이 커질수록 그래프가 좁아지므로, $c=1$일 때 I_n이 작아질 것으로 예상할 수 있다.

소문항 (i)

$x + a = c\tan u$로 놓으면 $\mathrm{d}x = c\sec^2 u\,\mathrm{d}u$이다. x가 $-\infty$에서 ∞까지 움직일 때 u는 $-\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\pi}{2}$까지 움직이고,

$$Q(x) = c^2\tan^2 u + c^2 = c^2\sec^2 u.$$

따라서

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{c\sec^2 u}{c^2\sec^2 u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{c}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{c} = \frac{\pi}{\sqrt{b-a^2}},$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다.

소문항 (ii)

$u = Q^{-n}$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$로 잡고 I_n을 부분적분한다. $Q'(x) = 2(x+a)$이므로 $v = x$보다 $v = x + a$로 고르는 편이 더 영리하다(역도함수(antiderivative)는 어느 것이든 상관없다). 그러면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,Q^{-n} = -2n(x+a)\,Q^{-n-1},$$

이므로

$$I_n = \left[\frac{x+a}{Q^n}\right]_{-\infty}^{\infty} + 2n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+a)^2}{Q^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

생각해 보기 경계항(boundary term)은 왜 사라지는가?

분자는 $|x|$처럼 커지고 분모는 x^{2n}처럼 커지며, $n \geq 1$이므로 $2n \geq 2$이다. 따라서 $x \to \pm\infty$일 때 $(x+a)/Q^n \to 0$이고, 대괄호 항은 0이다.

이제 $(x+a)^2 = Q - c^2$을 이용하여 남은 적분을 나눈다.

$$\begin{aligned} I_n &= 2n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q-c^2}{Q^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2n\,I_n - 2nc^2\,I_{n+1}. \end{aligned}$$

정리하면 $2nc^2 I_{n+1} = (2n-1)I_n$, 즉

$$2n(b-a^2)\,I_{n+1} = (2n-1)\,I_n,$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다. (I_n과 I_{n+1}이 모두 수렴하므로 적분을 나누는 것은 정당하다.)

소문항 (iii)

$P(n)$을 다음 명제라 하자.

$$I_n = \frac{\pi}{2^{2n-2}\,c^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1},$$

여기서 $c^{2n-1} = (b-a^2)^{n-\frac{1}{2}}$이다.

기저 단계(base case). $n=1$일 때 우변은 $\dfrac{\pi}{2^0 c^1}\binom{0}{0} = \dfrac{\pi}{c}$이고, 소문항 (i)에 의하여 이것은 I_1과 같다. 따라서 $P(1)$이 성립한다.

귀납 단계(inductive step). 어떤 $n \geq 1$에 대하여 $P(n)$이 성립한다고 가정하자. 소문항 (ii)에 의하여

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2nc^2} I_n = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2^{2n-2}\, c^{2n+1}} \binom{2n-2}{n-1}.$$

이것이 $P(n+1)$인 $\dfrac{\pi}{2^{2n} c^{2n+1}}\binom{2n}{n}$과 같음을 보이려 한다. 두 이항계수 사이의 관계는 다음과 같다.

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{(2n)(2n-1)}{n \cdot n} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!} = \frac{2(2n-1)}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

? **생각해 보기** 2의 거듭제곱을 어떻게 맞출 것인가?

$\dfrac{2n-1}{2n} = \dfrac{4}{2^2} \cdot \dfrac{2n-1}{2n} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{2(2n-1)}{n}$으로 쓴다. 그러면

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2(2n-1)}{n} \cdot \frac{\pi}{2^{2n-2}\, c^{2n+1}} \binom{2n-2}{n-1} \\ &= \frac{\pi}{2^{2n}\, c^{2n+1}} \cdot \frac{2(2n-1)}{n} \binom{2n-2}{n-1} = \frac{\pi}{2^{2n}\, c^{2n+1}} \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

$2n = 2(n+1)-2$, $n = (n+1)-1$이고 $c^{2n+1} = (b-a^2)^{(n+1)-\frac{1}{2}}$이므로, 이것은 정확히 $P(n+1)$이다.

수학적 귀납법에 의하여 모든 양의 정수 n에 대하여 $P(n)$이 성립한다.

$$I_n = \frac{\pi}{2^{2n-2}(b-a^2)^{n-\frac{1}{2}}} \binom{2n-2}{n-1}.$$

검산

- $a=0, b=1, n=2$일 때 공식은 $I_2 = \frac{\pi}{4}\binom{2}{1} = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$을 준다. $\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-2}\,\mathrm{d}x$를 수치적으로 계산하면 소수점 아래 열 자리까지 일치한다.
- 탄젠트 치환으로 $I_n = c^{1-2n}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2n-2}u\,\mathrm{d}u$도 얻는데, 이것은 표준적인 월리스(Wallis) 적분이며 그 알려진 값이 공식과 일치한다.
- $b > a^2$인 여러 무작위 a, b에 대하여 수치적분으로 $n=1,\ldots,5$일 때 공식을 확인하였고, 따라서 소문항 (ii)의 점화식도 확인하였다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 경계항이 사라지는 이유를 밝히지 않는 것. 여기에는 $n \geq 1$이 필요하다.
- 부분적분에서 $v = x + a$ 대신 $v = x$를 고르는 것. 이렇게 해도 풀리기는 하지만, 처리해야 할 $a \int (x+a)Q^{-n-1}\,\mathrm{d}x$ 항이 추가로 남는다.
- 귀납 단계에서 $b - a^2$의 지수를 놓치는 것. 각 단계마다 $1/c^2$을 곱하므로 c의 지수는 정확히 2만큼, 즉 $2n-1$에서 $2n+1$로 올라간다.

STEP 너머

실수 전체에서 유리함수(rational function)를 적분하는 문제는 복소해석학(complex analysis)의 위력을 잘 보여 주는 예이다. 유수 정리(residue theorem)를 쓰면 상반평면(upper half-plane)에 있는 $1/Q^n$의 유일한 극(pole) $z = -a + ic$만 살펴보아 몇 줄 만에 I_n을 계산할 수 있다. 여기 나타난 중심 이항계수(central binomial coefficient)는 π에 대한 월리스 곱(Wallis product)과 무작위 행보(random walk)에도 등장한다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 유수에 대하여 아름답고 기하학적인 설명을 제공한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.