풀이

STEP II 2016, 문제 9

역학 • 운동량과 에너지 손실

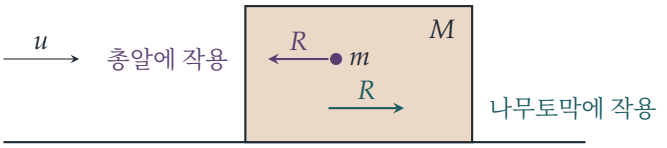
> **STEP II 2016, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q9

핵심 아이디어

저항력 R는 총알과 나무토막 사이에 작용하는 내력(internal force)이다. 이 힘은 총알을 감속시키고, 뉴턴(Newton)의 제3법칙에 따라 같은 크기로 나무토막을 앞으로 민다. 따라서 둘을 합친 계의 운동량(momentum)은 보존되지만 운동 에너지(kinetic energy)는 보존되지 않는다. 잃어버린 에너지는 정확히 총알이 나무토막 안에서 움직인 **상대** 거리만큼 R가 한 일과 같다. 나무토막 하나에만 일-에너지 원리(work–energy principle)를 적용하면 나무토막이 얼마나 움직이는지 알 수 있다.

풀이

총알과 나무토막을 하나의 수평선 위에서 움직이는 입자로 모형화하고, 총알이 나무토막에 대해 움직이는 동안 저항력 R는 일정하다고 한다. 총알의 처음 운동 방향을 양의 방향으로 잡는다.



연직 방향의 힘(무게와 탁자의 수직 항력)은 서로 평형을 이루므로 아무 역할도 하지 않는다. 수평 방향으로는 총알이 뒤쪽으로 R를 받고, 나무토막은 앞쪽으로 R를 받는다.

소문항 (i)

나무토막이 고정되어 있으면 총알의 감속도는 R/m로 일정하다. 나중 속력을 0, $\alpha = -R/m$로 두고 $v^2 = u^2 + 2\alpha s$를 쓰면

$$0 = u^2 - \frac{2R}{m}a \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a = \frac{mu^2}{2R}.}$$

(같은 말로, 저항력에 맞서 한 일 Ra는 총알의 처음 운동 에너지 $\frac{1}{2}mu^2$와 같다.)

소문항 (ii)

공통의 나중 속도. 탁자가 매끄러우므로 총알과 나무토막으로 이루어진 계에는 외부의 수평 방향 힘이 작용하지 않는다. 총알이 나무토막에 대해 정지하면 둘은 같은 속도 V로 움직이고, 운동량 보존에 의해

$$mu = (M+m)V \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{mu}{M+m}.$$

> **생각해 보기** 저항력은 나무토막 안의 총알 경로를 따라 거리 b에 걸쳐 작용하지만, 총알 자체는 탁자에 대해 $b+c$만큼 이동한다. 에너지 방정식에는 어느 거리가 들어가야 하는가?

b 구하기. 탁자를 기준으로 하면, 총알은 $b+c$만큼 움직이므로 총알에 작용하는 힘 R가 한 일은 $-R(b+c)$이고, 나무토막은 c만큼 움직이므로 나무토막에 작용하는 힘 R가 한 일은 $+Rc$이다. 따라서 계에 한 알짜 일은 $-Rb$이다. 즉 상대 변위만 중요하다. 일-에너지 원리에 의해

$$\begin{aligned} Rb &= \tfrac{1}{2}mu^2 - \tfrac{1}{2}(M+m)V^2 \\ &= \tfrac{1}{2}mu^2 - \frac{m^2u^2}{2(M+m)} \\ &= \tfrac{1}{2}mu^2\left(1 - \frac{m}{M+m}\right) = \tfrac{1}{2}mu^2 \cdot \frac{M}{M+m}. \end{aligned}$$

소문항 (i)에서 $\frac{1}{2}mu^2 = Ra$이므로, 양변을 R로 나누면

$$\boxed{b = \frac{M}{M+m}a.}$$

c 구하기. 이번에는 나무토막 하나에만 일-에너지 원리를 적용한다. 나무토막은 정지 상태에서 출발해 속력 V로 끝나며, 나무토막에 작용하는 수평 방향의 힘은 앞쪽으로 거리 c에 걸쳐 작용하는 R뿐이다.

$$Rc = \tfrac{1}{2}MV^2 = \frac{Mm^2u^2}{2(M+m)^2} = \tfrac{1}{2}mu^2 \cdot \frac{mM}{(M+m)^2}.$$

다시 $\frac{1}{2}mu^2 = Ra$를 쓰면

$$\boxed{c = \frac{mM}{(M+m)^2}\,a.}$$

운동학(kinematics)을 이용한 다른 방법. 총알은 R/m로 감속하고 나무토막은 R/M로 가속한다. 두 속도는 $u - Rt/m = Rt/M$일 때 같아지므로

$$t = \frac{mMu}{R(M+m)}, \qquad c = \frac{1}{2}\cdot\frac{R}{M}\,t^2 = \frac{m^2Mu^2}{2R(M+m)^2},$$

이고, 이는 위의 결과와 일치한다. b는 총알의 변위에서 c를 빼서 얻는다.

검산

- $M \to \infty$이면 나무토막은 고정된 것처럼 행동한다. 실제로 $b \to a$, $c \to 0$이 되어 마땅히 그래야 하는 대로이다.
- $\frac{M}{M+m} < 1$이므로 $b < a$이다. 움직일 수 있는 나무토막은 총알의 에너지를 열로 덜 흡수하므로 총알이 그만큼 깊이 박히지 않는다.
- $M = 4m$이면 $b = \frac{4}{5}a$, $c = \frac{4}{25}a$이다. m, M, u, R를 여러 가지로 무작위로 골라 작은 시간 간격으로 운동을 수치적으로 진행시켜 보면 a, b, c가 유효숫자 네 자리까지 재현된다.

흔한 실수

- 에너지 손실 방정식에 상대 거리 b 대신 탁자에 대한 총알의 이동 거리 $b + c$를 쓰는 것.
- 충돌에서 운동 에너지가 보존된다고 가정하는 것. 운동 에너지는 보존되지 않으며, 손실 Rb는 발생한 열이다.
- 나무토막도 힘 R를 받는다는 것(뉴턴의 제3법칙)을 잊어서 나무토막의 운동을 설명하지 못하는 것.

STEP 너머

내력이 한 알짜 일은 상대 운동이 없을 때에만 0이라는 사실은 입자계의 에너지를 엄밀하게 다루는 출발점이다. 질량 중심 좌표계(centre-of-mass frame)에서 생각하면 깔끔해진다. 소산될 수 있는 운동 에너지는 환산 질량(reduced mass) $\mu = mM/(M+m)$을 써서 $\frac{1}{2}\mu u^2$이며, 이는 여기서 정확히 Rb와 같다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 아이디어를 철저하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.