풀이

STEP II 2016, 문제 8

순수수학 • 적분을 이용한 합의 근사

> **STEP II 2016, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q8

핵심 아이디어

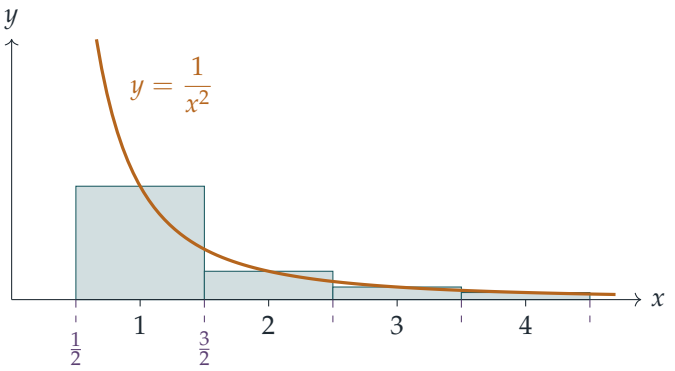
항 $\frac{1}{r^2}$은 너비가 1이고 높이가 $\frac{1}{r^2}$인 직사각형의 넓이이다. 이 직사각형의 중심을 $x = r$에 두면, 그 넓이는 $r - \frac{1}{2}$부터 $r + \frac{1}{2}$까지 $y = \frac{1}{x^2}$ 아래의 넓이와 매우 가깝다(중점 공식(midpoint rule)). 이 띠들을 이어 붙이면 합이 하나의 적분(integral)으로 바뀐다. 그러면 각 띠에서 생기는 오차를 정확히 계산할 수 있고, 이 오차들을 더하면 두 번째 급수(series) $\sum \frac{1}{r^4}$이 거의 공짜로 얻어진다.

풀이

적분과 그림

$m > \frac{1}{2}$이면 아래끝이 양수이므로 피적분함수(integrand)는 적분 구간에서 연속이고

$$\int_{m-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{m-\frac{1}{2}}^{X} = \frac{1}{m-\frac{1}{2}} = \frac{2}{2m-1}.$$



$x = r$에 중심을 둔 직사각형은 너비가 1, 높이가 $\frac{1}{r^2}$이므로 넓이가 $\frac{1}{r^2}$이다. 띠 $r - \frac{1}{2} \le x \le r + \frac{1}{2}$에서 곡선은 왼쪽 절반에서는 직사각형의 윗변보다 위에, 오른쪽 절반에서는 아래에 있고, 이 두 작은 조각은 거의 상쇄된다. 따라서

$$\frac{1}{r^2} \approx \int_{r-\frac{1}{2}}^{r+\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

이것을 $r = m, m+1, \ldots, n$에 대해 더하면 띠들이 끝과 끝이 맞닿아 $[m - \frac{1}{2},\ n + \frac{1}{2}]$를 덮으므로 $(*)$를 얻는다.

소문항 (i)

$(*)$에서 $n \to \infty$로 보내자. 우변은 앞에서 계산한 적분으로 수렴(converge)하므로

$$\sum_{r=m}^{\infty} \frac{1}{r^2} \approx \frac{2}{2m-1}.$$

이것을 급수 전체에 적용할 수도 있고, 처음 몇 항은 정확히 더한 뒤 꼬리(tail)만 근사할 수도 있다.

$$\begin{aligned}
m = 1: &\quad E \approx \frac{2}{1} = 2,\\
m = 2: &\quad E = 1 + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r^2} \approx 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3},\\
m = 3: &\quad E = 1 + \frac{1}{4} + \sum_{r=3}^{\infty} \frac{1}{r^2} \approx \frac{5}{4} + \frac{2}{5} = \frac{33}{20}.
\end{aligned}$$

이것이 요구된 세 근삿값이다. 멀리 갈수록 곡선이 평평해져 중점 근사가 더 좋아지므로, m이 커질수록 근삿값도 좋아질 것이다.

소문항 (ii)

띠 하나에서의 적분은

$$\int_{r-\frac{1}{2}}^{r+\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r-\frac{1}{2}} - \frac{1}{r+\frac{1}{2}} = \frac{1}{r^2-\frac{1}{4}} = \frac{4}{4r^2-1}.$$

따라서 $\frac{1}{r^2}$을 이 적분으로 근사할 때의 오차는

$$\frac{4}{4r^2-1} - \frac{1}{r^2} = \frac{4r^2-(4r^2-1)}{r^2(4r^2-1)} = \frac{1}{r^2(4r^2-1)} = \frac{1}{4r^4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4r^2}}.$$

r이 크면 $\frac{1}{4r^2}$이 작으므로 마지막 인수는 1에 가깝고, 요구된 대로 오차는 대략 $\frac{1}{4r^4}$이다. (적분이 항상 더 크다는 사실은 그림과도 맞아떨어진다. $\frac{1}{x^2}$은 볼록(convex)하므로 각 띠의 왼쪽에서 더해지는 넓이가 오른쪽에서 모자라는 넓이보다 크다.)

마지막 결과를 얻기 위해 $r=m$부터의 오차를 모두 더한다. 띠 위의 적분들을 더하면 처음에 계산한 적분이 되므로

$$\frac{2}{2m-1} - \sum_{r=m}^{\infty}\frac{1}{r^2} = \sum_{r=m}^{\infty}\frac{1}{r^2(4r^2-1)} \approx \frac{1}{4}\sum_{r=m}^{\infty}\frac{1}{r^4}.$$

? **생각해 보기** 가장 간단해 보이는 $m=1$을 택하지 않는 이유는 무엇일까?

$m=1$이면 좌변은 $2-1.645=0.355$이고, $\sum\frac{1}{r^4}\approx 1.42$가 되어 너무 크다. 문제는 "$\approx\frac{1}{4r^4}$"가 r이 클 때에만 좋은 근사라는 점이다. $r=1$에서 실제 오차는 $\frac{1}{4}$가 아니라 $\frac{1}{3}$이며, 이 첫 항이 전체 합을 좌우한다. 그러므로 처음 몇 항은 정확히 두고 꼬리에만 근사를 써야 한다. $m=3$($\frac{33}{20}$을 준 선택)을 택하면 가장 나쁜 인수 $\frac{1}{1-1/(4r^2)}$이 $\frac{36}{35}$으로, 1과 3% 이내로 차이 난다.

$$\frac{1}{4}\sum_{r=3}^{\infty}\frac{1}{r^4} \approx \frac{2}{5} - \left(E-1-\frac{1}{4}\right) \approx 0.4-0.395 = 0.005,$$

따라서 $\sum_{r=3}^{\infty}\frac{1}{r^4}\approx 0.02$이고

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^4} \approx 1+\frac{1}{16}+0.02 = 1.0825 \approx 1.08.$$

이것이 요구된 결과이다. E가 소수점 아래 셋째 자리까지만 주어져 있으므로 E의 오차는 최대 0.0005이고, 이것이 여기서는 최대 0.002의 오차가 되지만 여전히 1.08이 남는다.

검산

- 근삿값 2, $\frac{5}{3}\approx 1.667$, $\frac{33}{20}=1.65$는 $E=\frac{\pi^2}{6}\approx 1.6449$를 향해 감소하며, 볼록성 논증이 예측하듯 모두 실제보다 크다.

- $r = 10$에서 정확한 오차 $\frac{1}{100\times399} \approx 2.506 \times 10^{-5}$은 $\frac{1}{4\times10^4} = 2.5 \times 10^{-5}$에 매우 가깝다.
- 정확한 값은 $\sum \frac{1}{r^4} = \frac{\pi^4}{90} \approx 1.0823$으로, 우리가 얻은 1.0825와 일치한다. 대신 $m = 2$를 쓰면 $1 + 4\left(\frac{2}{3} - 0.645\right) \approx 1.087$로 눈에 띄게 나빠지고, $m = 1$을 쓰면 1.42가 된다.

흔한 실수

- 마지막 부분에서 큰 r에 대한 근사 $\frac{1}{4r^4}$이 부정확한 $m = 1$을 써서 1.42를 얻는 것.
- 오차의 부호를 거꾸로 잡는 것. 적분이 $\frac{1}{r^2}$보다 크므로 $\frac{2}{2m-1}$은 꼬리를 과대추정(overestimate)한 값이다.
- 정확히 계산한 처음 항들($1 + \frac{1}{4}$, 그리고 $1 + \frac{1}{16}$)을 다시 더하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

이것은 중점 공식이며, 오차항 $\frac{1}{4r^4}$은 오일러–매클로린 공식(Euler–Maclaurin formula)을 살짝 엿본 것이다. 이 공식은 합을 적분과 도함수 항들로 이루어진 급수로 보정하며, $\sum \frac{1}{r^2}$ 같은 합을 소수점 아래 여러 자리까지 계산하는 방법이기도 하다. 정확한 값 $\frac{\pi^2}{6}$과 $\frac{\pi^4}{90}$은 푸리에 급수(Fourier series)나 $\sin x$에 대한 오일러(Euler)의 곱에서 나온다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)는 급수와 적분을 꼼꼼하게 다루며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)에는 이런 정신의 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.