풀이

STEP II 2016, 문제 7

순수수학 • 대칭성을 이용한 정적분

> **STEP II 2016, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q7

핵심 아이디어

구간(interval) $[0, a]$를 그 중점에 대하여 뒤집는 변환 $x \mapsto a - x$는 적분값을 바꾸지 않지만, 피적분함수(integrand)를 원래 함수와 멋지게 어우러지는 꼴로 바꿀 수 있다. $[0, \frac{1}{2}\pi]$에서 정의된 삼각함수 피적분함수라면 이 변환은 sin과 cos을 맞바꾸고, $[0, \frac{1}{4}\pi]$에서는 $\tan(\frac{1}{4}\pi - x)$에 대한 덧셈정리(compound-angle formula)가 그 역할을 한다. 마지막 소문항은 새로워 보이지만, 부분적분(integration by parts)을 한 번 하면 소문항 (iii)으로 바뀐다.

풀이

결과 $(*)$

$\int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x$에서 $u = a - x$로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$이고, $x = 0$일 때 $u = a$, $x = a$일 때 $u = 0$이다. 따라서

$$\int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x = \int_a^0 f(u)\,(-\mathrm{d}u) = \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x,$$

인데, 적분변수의 이름은 상관없기 때문이다. 이것이 $(*)$이다.

소문항 (i)

이 적분을 I라 하자. $a = \frac{1}{2}\pi$이면 $\sin(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos x$이고 $\cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \sin x$이므로, $(*)$에 의해

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x.$$

이것을 원래 꼴의 I에 더하면

$$2I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$

이므로

$$I = \frac{\pi}{4}.$$

(분모(denominator) $\cos x + \sin x$는 $[0, \frac{1}{2}\pi]$에서 양수이므로 아무 문제가 없다.)

소문항 (ii)

이제 $a = \frac{1}{4}\pi$이고, 소문항 (i)의 방법으로는 더 이상 sin과 cos이 맞바뀌지 않는다. 대신 분자와 분모를 $\cos x$(이 구간에서 양수)로 나누면 피적분함수는

$$\frac{\sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{\tan x}{1 + \tan x}.$$

이다. $t = \tan x$라 하자. $\tan(\frac{1}{4}\pi - x) = \dfrac{1-t}{1+t}$이므로

$$\frac{\tan(\frac{1}{4}\pi - x)}{1 + \tan(\frac{1}{4}\pi - x)} = \frac{(1-t)/(1+t)}{2/(1+t)} = \frac{1-t}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tan x.$$

따라서 이 적분을 J라 하면 $(*)$에 의해

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tan x\Big)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\Big[-\ln\cos x\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2. \end{aligned}$$

? **생각해 보기** $(*)$를 전혀 쓰지 않고 소문항 (ii)를 푸는 방법이 있을까?

있다. $K = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x$라 하자. 그러면 $J + K = \frac{1}{4}\pi$이고, 분자(numerator) $\cos x - \sin x$가 분모의 도함수(derivative)이므로

$$K - J = \Big[\ln(\cos x + \sin x)\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \ln\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

두 식을 빼면 $2J = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\ln 2$이고, 이는 위의 답과 일치한다.

소문항 (iii)

이 적분을 L이라 하자. 같은 덧셈정리에 의해

$$1 + \tan(\tfrac{1}{4}\pi - x) = 1 + \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \frac{2}{1 + \tan x}.$$

따라서 $(*)$에 의해

$$L = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \ln \frac{2}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\ln 2 - \ln(1+\tan x))\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\ln 2 - L.$$

그러므로 $2L = \frac{1}{4}\pi \ln 2$이고

$$L = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

소문항 (iv)

분자와 분모를 $\cos^2 x$로 나눈다.

$$\frac{x}{\cos x\,(\cos x + \sin x)} = \frac{x\sec^2 x}{1+\tan x}.$$

? **생각해 보기** $\dfrac{\sec^2 x}{1+\tan x}$는 소문항 (iii)과 무슨 관계가 있을까?

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+\tan x) = \sec^2 x$이므로, 이것은 정확히 $\ln(1+\tan x)$의 도함수이다. 또한 $[0, \frac{1}{4}\pi]$에서 $1+\tan x > 0$이다. 따라서 $u = x$, $\mathrm{d}v = \dfrac{\sec^2 x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x$, $v = \ln(1+\tan x)$로 두고 부분적분한다.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{x\sec^2 x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x &= \Big[x\ln(1+\tan x)\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{\pi}{8}\ln 2 \qquad \text{(소문항 (iii) 이용)} \\ &= \frac{\pi}{8}\ln 2.\end{aligned}$$

따라서 소문항 (iv)의 적분은 소문항 (iii)의 적분과 같은 값을 가진다.

검산

- 소문항 (i): 피적분함수는 0에서 1까지 증가하고 점 $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$에 대하여 대칭(symmetric)이므로, 평균값이 $\frac{1}{2}$이고 적분값은 구간 길이의 절반인 $\frac{1}{4}\pi$이다.
- 소문항 (ii)의 값은 소문항 (i)의 절반보다 작아야 한다. $[0, \frac{1}{4}\pi]$에서 피적분함수가 $\frac{1}{2}$보다 작기 때문이다. 실제로 $\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4}\ln 2 \approx 0.2194 < 0.3927$이다.
- 수치 적분(numerical quadrature)(심프슨 공식(Simpson's rule))으로 계산하면 네 소문항에 대해 0.785398, 0.219412, 0.272198, 0.272198을 얻는데, 이는 $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4}\ln 2$, 그리고 $\frac{1}{8}\pi \ln 2$(두 번)와 일치한다.

흔한 실수

- 치환 $u = a - x$를 하면 적분의 위끝과 아래끝이 뒤바뀐다는 것을 잊는 실수. $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$에서 나오는 음의 부호가 이를 다시 뒤바꾼다.
- 소문항 (ii)에서 소문항 (i)처럼 sin과 cos을 맞바꾸려는 실수. $[0, \frac{1}{4}\pi]$에서의 뒤집기는 $\frac{1}{2}\pi - x$가 아니라 $x \mapsto \frac{1}{4}\pi - x$이다.
- $\int \tan x \,\mathrm{d}x = \ln\cos x$라고 쓰는 실수. 올바른 값은 $-\ln\cos x$(또는 $\ln\sec x$)이다.

STEP 너머

소문항 (iii)은 고전적인 문제이다. 같은 뒤집기 기법으로 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln\sin x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi\ln 2$와 같은 적분도 계산할 수 있는데, 이 적분은 초등함수(elementary functions)로 된 원시함수(antiderivative)로는 구할 수 없다. 대학에서는 이러한 대칭 논법이 복소 경로 적분(contour integration), 적분 기호 아래에서의 미분(differentiation under the integral sign)과 더불어, 초등함수인 원시함수가 없는 정적분(definite integral)을 다루는 도구로 쓰인다. STEP의 정신을 담은 예제를 더 많이 보려면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)를, 치환과 부분적분을 정당화하는 해석학(analysis)에 대해서는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.