풀이

STEP II 2016, 문제 6

순수수학 • 체비쇼프 다항식 방정식

> **STEP II 2016, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q6

핵심 아이디어

모든 소문항은 제시된 함수를 미분방정식(differential equation)에 대입하고 $x = 1$에서의 조건을 확인하는 문제이며, 나머지는 유일성(uniqueness) 가정이 해결해 준다. (iii)과 (iv)의 요령은 y_n을 절대 전개하지 않고(우리는 y_n을 명시적으로 알지 못한다), 방정식 $(1-x^2)y_n'^2 = n^2(1-y_n^2)$ 자체를 이용하여 도함수(derivative)를 소거하는 것이다.

풀이

이 풀이 전체에서 y_k는

$$(1-x^2)(y_k'(x))^2 = k^2(1-y_k(x)^2), \qquad y_k(1) = 1,$$

을 만족하며, 이는 $(*)$를 정리한 것에 불과하다. 어떤 함수가 y_k와 같음을 보이려면, (가정한 유일성에 의해) 그 함수가 해당 k 값에 대하여 $(*)$를 만족하고 $x = 1$에서 값 1을 가짐을 보이면 충분하다.

소문항 (i)

$k = 1$일 때 방정식은

$$(1-x^2)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + y^2 = 1.$$

이다. $y = x$이면 $y' = 1$이고, 좌변은 $(1-x^2) + x^2 = 1$이 되어 조건을 만족한다. 또한 $y(1) = 1$이므로 $y_1(x) = x$이다.

소문항 (ii)

$k = 2$일 때 방정식은

$$(1 - x^2)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 4y^2 = 4.$$

이다. $y = 2x^2 - 1$이면 $y' = 4x$이므로

$$\begin{aligned}(1 - x^2)(4x)^2 + 4(2x^2 - 1)^2 &= 16x^2 - 16x^4 + 16x^4 - 16x^2 + 4 \\ &= 4.\end{aligned}$$

이다. $y(1) = 2 - 1 = 1$이므로 $y_2(x) = 2x^2 - 1$을 얻는다.

소문항 (iii)

간단히 $y = y_n(x)$라 쓰자. 연쇄법칙(chain rule)으로 $z = 2y^2 - 1$을 미분하면 $z' = 4yy'$이므로, y_n에 대한 방정식을 이용하면

$$(1 - x^2)z'^2 = 16y^2\,(1 - x^2)y'^2 = 16y^2 \cdot n^2(1 - y^2),$$

이다. 또한

$$4n^2z^2 = 4n^2(2y^2 - 1)^2 = 4n^2(4y^4 - 4y^2 + 1).$$

이다. 두 식을 더하면

$$(1 - x^2)z'^2 + 4n^2z^2 = 16n^2y^2 - 16n^2y^4 + 16n^2y^4 - 16n^2y^2 + 4n^2 = 4n^2,$$

이 되어, 구하려던 방정식을 얻는다.

? **생각해 보기** 이 방정식은 y_{2n}과 어떤 관계가 있을까?

$(2n)^2 = 4n^2$이므로 이는 정확히 $k = 2n$일 때의 $(*)$이다. 더구나 $z(1) = 2y_n(1)^2 - 1 = 2 - 1 = 1$이다. 따라서 z는 $k = 2n$일 때 $(*)$의 해이고 $x = 1$에서 값 1을 가지므로, 유일성에 의해

$$y_{2n}(x) = 2(y_n(x))^2 - 1.$$

이다. 확인해 보면, $n = 1$일 때 $y_2 = 2x^2 - 1$이 되어 (ii)와 일치하고, $n = 2$일 때 $y_4 = 2(2x^2 - 1)^2 - 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$이 된다.

소문항 (iv)

$u = y_m(x)$라 쓰면 $v = y_n(u)$이다. 연쇄법칙에 의해

$$v'(x) = y_n'(u)\,y_m'(x).$$

이다. 따라서 먼저 (x에서의) y_m에 대한 방정식을, 다음으로 (u에서의) y_n에 대한 방정식을 이용하면

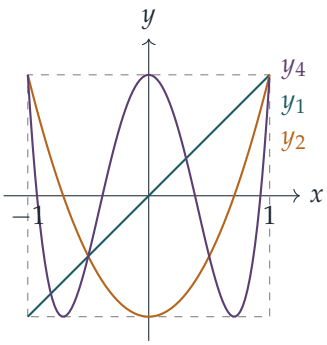
$$\begin{aligned}(1-x^2)v'^2 &= y_n'(u)^2\,(1-x^2)y_m'(x)^2\\ &= y_n'(u)^2\cdot m^2(1-u^2)\\ &= m^2\,(1-u^2)y_n'(u)^2\\ &= m^2\cdot n^2(1-y_n(u)^2) = m^2n^2(1-v^2).\end{aligned}$$

이다. 그러므로 $(1-x^2)v'^2+(mn)^2v^2=(mn)^2$이고, 이는 $k=mn$일 때의 $(*)$이다. 마지막으로

$$v(1)=y_n(y_m(1))=y_n(1)=1,$$

이므로 유일성에 의해 $v(x)=y_{mn}(x)$이다. 이로써 증명이 끝난다.

y_n에 대한 방정식은 x가 아니라 점 u에서 적용된다. 이 방정식은 변수의 모든 값에 대하여 성립하므로 x 대신 u를 넣어 사용할 수 있다. 바로 이 단계가 (iv)를 가능하게 한다.



세 곡선 모두 $(1,1)$을 지나고 $[-1,1]$에서 -1과 1 사이에 머무는데, 이는 방정식이 강제하는 바이다. 그 구간에서 $(1-x^2)y'^2\geq 0$이므로 $k^2y^2\leq k^2$이기 때문이다.

검산

- $n=2$일 때 소문항 (iii)은 $y_4(x)=8x^4-8x^2+1$을 예측한다. 직접 대입하면 $y_4'=32x^3-16x$이고 $(1-x^2)(32x^3-16x)^2+16(8x^4-8x^2+1)^2$을 정리하면 16이 된다. $x=0.3$에서 $y_4=0.3448$이다.
- $m=n=2$일 때 소문항 (iv): $y_2(y_2(x))=2(2x^2-1)^2-1$이며, 이는 (iii)에서 얻은 y_4와 같고, 마땅히 그래야 한다.
- 컴퓨터로 정확한 산술을 이용하여 확인한 결과, 이렇게 만든 다항식들은 24 이하의 모든 k에 대하여 $(*)$를 만족하고, $m,n\leq 4$에 대하여 $y_n(y_m(x))=y_{mn}(x)$가 성립하였다.

흔한 실수

- $x = 1$에서의 조건을 잊는 것. $(*)$를 만족하는 것만으로는 충분하지 않다. $-y_k$도 이를 만족하기 때문이다.
- (iii)이나 (iv)에서 y_n을 명시적으로 전개하려 하는 것. y_n에 대해 명시적으로 알려진 것은 없다. 그 미분방정식을 이용하여 $(1-x^2)y_n'^2$을 바꾸어 써야 한다.
- (iv)에서 y_n에 대한 방정식을 $u = y_m(x)$ 대신 x로 사용하는 것. 그러면 인수 $(1-x^2)$가 엉뚱한 자리에 나타난다.

STEP 너머

함수 y_k는 체비쇼프(Chebyshev) 다항식(Chebyshev polynomials) T_k이다. $x = \cos\theta$로 놓으면 $(*)$는 $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta)^2 = k^2(1-y^2)$이 되고, 그 해는 $y = \cos k\theta$이므로 $T_k(\cos\theta) = \cos k\theta$이다. 그러면 소문항 (iii)은 배각 공식(double-angle formula)이 되고, 소문항 (iv)는 $\cos\big(n(m\theta)\big) = \cos(mn\theta)$라는 뜻이 된다. 한 가지 주의할 점이 있다. 문제에서 가정해도 된다고 한 유일성은 사실 엄밀히 참이 아니다. 상수함수 $y = 1$도 $(*)$와 $y(1) = 1$을 만족하기 때문이다. 이 방정식처럼 도함수가 부호를 제외하고만 결정되는 방정식이야말로 유일성 정리를 신중하게 다루어야 하는 곳이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 해의 존재성과 유일성을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.