풀이

STEP II 2016, 문제 5

순수수학 • 이항계수 항등식

> **STEP II 2016, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q5

핵심 아이디어

세 항등식(identity)은 모두 하나의 요령에서 나온다. 한 함수를 두 가지 방법으로 곱의 꼴로 쓰고, x의 한 거듭제곱의 계수를 비교하는 것이다. 첨자의 합이 일정한 이항계수(binomial coefficient)들의 곱의 합은 두 거듭제곱급수(power series)를 곱한 뒤 계수 하나를 읽어 낼 때 얻는 것과 정확히 같다. $p \geq q \geq 0$가 아닐 때 $\binom{p}{q} = 0$으로 둔다는 문제의 약속 덕분에, 어떤 항이 존재하는지 따질 필요 없이 j에 대한 합을 깔끔한 범위에서 잡을 수 있다.

풀이

소문항 (i)

$|x| < 1$일 때 이항급수(binomial series)에 따르면 $(1-x)^{-N}$에서 x^n의 계수는 다음과 같다.

$$\frac{(-N)(-N-1)\cdots(-N-n+1)}{n!}(-1)^n = \frac{N(N+1)\cdots(N+n-1)}{n!}$$
$$= \frac{(N+n-1)!}{n!\,(N-1)!} = \binom{N+n-1}{n}.$$

인수들에서 나온 n개의 음의 부호가 $(-x)^n$에서 나온 n개의 음의 부호와 상쇄된다. 따라서

$$(1-x)^{-N} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{N+n-1}{n} x^n \qquad (|x| < 1).$$

($n = 0$일 때 계수는 $\binom{N-1}{0} = 1$이다. $N \geq 1$이므로 문제없다.)

이제 $(1-x)^{-1}(1-x)^{-N} = (1-x)^{-(N+1)}$이다. 위의 전개에서 N 대신 $N+1$을 쓰면, 우변에서 x^n의 계수는 $\binom{N+n}{n}$이다.

좌변에서 $(1-x)^{-1} = \sum_{i\geq 0} x^i$는 모든 계수가 1이다. $(1-x)^{-N}$의 항 x^j는 $(1-x)^{-1}$의 x^{n-j}와 짝을 이루어야 하고, j는 0부터 n까지 움직인다. 따라서 곱에서 x^n의 계수는

$$\sum_{j=0}^{n} 1 \cdot \binom{N+j-1}{j}.$$

두 거듭제곱급수는 모두 $|x| < 1$에서 수렴(converge)하고 그 범위에서 같은 함수를 나타내므로, 계수가 서로 같다. 그러므로

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{N+j-1}{j} = \binom{N+n}{n},$$

이고, 이것이 증명하려던 식이다.

소문항 (ii)

$(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$을 이용한다. 여기서 세 식은 모두 다항식(polynomial)이다. 문제의 약속을 쓰면

$$(1+x)^m = \sum_{j\geq 0} \binom{m}{j} x^j, \qquad (1+x)^n = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} x^k,$$

로 쓸 수 있다. $j > m$ 또는 $k > n$인 계수는 0이기 때문이다. 곱에서 x^r의 계수는 $j+k=r$인 쌍, 즉 $0 \leq j \leq r$이고 $k = r-j$인 쌍에서 나온다.

$$\sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j}\binom{n}{r-j}.$$

> **생각해 보기** $j > m$ 또는 $r-j > n$인 항은 어떻게 되는가? 그런 거듭제곱은 다항식에 나타나지 않는다.

그런 항에는 $j > m$인 인수 $\binom{m}{j}$ 또는 $r-j > n$인 인수 $\binom{n}{r-j}$가 들어 있으므로, 약속에 의해 0이다. 이 항들은 아무것도 더하지 않을 뿐 아니라 실제로 존재하는 항들의 곱에도 대응하지 않으므로, $0 \leq j \leq r$에 대한 합이 정확히 맞다. $(1+x)^{m+n}$에서 x^r의 계수는 $\binom{m+n}{r}$이다. 같은 다항식은 계수가 같으므로

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j}\binom{n}{r-j}.$$

소문항 (iii)

인수 $(-1)^j\binom{m+j-1}{j}$를 보면 소문항 (i)에서 x 대신 $-x$를 넣는 것이 떠오른다. 소문항 (i)의 전개에서 x를 $-x$로, N을 m으로 바꾸면

$$(1+x)^{-m} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{m+j-1}{j} x^j \qquad (|x| < 1).$$

생각해 보기 어떤 곱을 이용해야 하는가?

다른 인수 $\binom{N+m}{n-j}$는 $(1+x)^{N+m}$의 계수이고, 답 $\binom{N}{n}$은 $(1+x)^N$의 계수이다. m이 양의 정수이므로 $|x|<1$에서

$$(1+x)^{N+m}(1+x)^{-m}=(1+x)^N.$$

좌변에서 $(1+x)^{N+m}=\sum_{k\geq 0}\binom{N+m}{k}x^k$이다($k>N+m$에 대해서는 약속을 쓴다). x^n의 계수는 $0\leq j\leq n$에 대하여 $(1+x)^{-m}$의 x^j와 $(1+x)^{N+m}$의 x^{n-j}를 곱한 것에서 나온다.

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{N+m}{n-j}(-1)^j\binom{m+j-1}{j}.$$

우변에서 $(1+x)^N$의 x^n의 계수는 $\binom{N}{n}$이다. $n>N$이면 약속에 의해 이 값은 0인데, $(1+x)^N$의 차수가 N이므로 이것 역시 옳다. 두 변은 $|x|<1$에서 같으므로, 거듭제곱급수의 계수가 서로 같다.

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{N+m}{n-j}\binom{m+j-1}{j}=\binom{N}{n}.$$

검산

- $N=2, n=3$일 때 소문항 (i): $1+2+3+4=10=\binom{5}{3}$.
- $m=n=2, r=2$일 때 소문항 (ii): $1\cdot 1+2\cdot 2+1\cdot 1=6=\binom{4}{2}$.
- $m=2, N=3, n=2$일 때 소문항 (iii): $\binom{5}{2}\binom{1}{0}-\binom{5}{1}\binom{2}{1}+\binom{5}{0}\binom{3}{2}=10-10+3=3=\binom{3}{2}$. $n>N$이면 교대합이 0이 되어야 한다. 예를 들어 $m=1, N=1, n=2$이면 $\binom{2}{2}-\binom{2}{1}+\binom{2}{0}=1-2+1=0$이다.

세 항등식 모두 모든 $m, N\leq 9$와 $n\leq 24$에 대하여 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- $(1-x)^{-N}$의 계수에서 부호를 놓치는 것. $(-1)^n$이 두 번 나오며, 이 둘은 상쇄된다.
- 소문항 (iii)에서 $(1+x)^{-m}$의 급수가 무한급수이고 $|x|<1$에서만 성립한다는 것을 잊는 것. 구간에서 일치하는 두 거듭제곱급수는 계수가 같으므로 계수 비교(comparing coefficients)가 정당하다.

STEP 너머

이것이 생성함수(*generating functions*)의 방법이다. 수열을 거듭제곱급수의 계수로 나타내면, 급수의 곱셈은 여기서 본 합성곱(convolution) 합이 된다. 소문항 (ii)는 방데르몽드(Vandermonde) 항등식이고, 소문항 (i)은 흔히 하키스틱 항등식(hockey-stick identity)이라 부른다. 둘 다 깔끔한 셈하기 증명도 있으니 찾아볼 만하다. Wilf의 *generatingfunctionology*(온라인에서 무료로 볼 수 있다)와 Graham, Knuth, Patashnik의 *Concrete Mathematics*는 이 도구들을 훨씬 더 깊이 발전시킨다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.