풀이

STEP II 2016, 문제 4

순수수학 • 유리함수의 치역

> **STEP II 2016, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q4

핵심 아이디어

분모를 없애면 y의 정의는 x에 대한 이차방정식(quadratic equation)이 되고, "x가 실수이다"라는 조건은 "판별식(discriminant)이 음이 아니다"라는 조건이 된다. θ를 없애려면 모든 θ에 대해 성립하는 $y\cos\theta - \sin\theta$의 상계(upper bound)가 필요하다. 이 식을 $(y, -1)$과 단위벡터(unit vector) $(\cos\theta, \sin\theta)$의 내적(dot product)으로 쓰면 정확히 $\sqrt{y^2+1}$을 얻는다. 소문항 (ii)에서는 부등식의 사슬에 있는 모든 부등식이 등식이 되어야 하며, 이로부터 x와 θ가 모두 결정된다.

풀이

소문항 (i)

먼저 분모가 결코 0이 되지 않음을 확인한다. x에 대한 이차식으로 보면 $x^2 + x\cos\theta + 1$의 판별식은 $\cos^2\theta - 4 < 0$이므로 이 식은 항상 양수이다. 따라서 양변에 분모를 곱해도 안전하다.

$$y(x^2 + x\cos\theta + 1) = x^2 + x\sin\theta + 1 \iff (y-1)x^2 + (y\cos\theta - \sin\theta)\,x + (y-1) = 0.$$

$y \neq 1$이면 이것은 x에 대한 진짜 이차방정식이고, 이 방정식이 실근 x를 가질 필요충분조건은 판별식이 음이 아닌 것이다.

$$(y\cos\theta - \sin\theta)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0.$$

$y = 1$이면 증명할 부등식은 $(\cos\theta - \sin\theta)^2 \geq 0$이 되는데, 이는 어차피 참이다. 따라서 실수 x에 대하여

$$(y\cos\theta - \sin\theta)^2 \geq 4(y-1)^2,$$

이 성립하고, 이것이 증명할 내용이었다.

생각해 보기 어떻게 하면 θ를 없앨 수 있을까? θ에 의존하지 않으면서 $(y\cos\theta - \sin\theta)^2$보다 큰 것을 찾고 싶다.

식 $y\cos\theta - \sin\theta$는 $(y, -1)$과 단위벡터 $(\cos\theta, \sin\theta)$의 스칼라곱이므로, 그 크기는 많아야 $|(y,-1)| = \sqrt{y^2+1}$이다. 같은 내용을 코시-슈바르츠 부등식(Cauchy–Schwarz inequality)으로 얻을 수도 있고, 다음 식에서 직접 얻을 수도 있다.

$$(y^2+1)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - (y\cos\theta - \sin\theta)^2 = (y\sin\theta + \cos\theta)^2 \geq 0,$$

따라서 $(y\cos\theta - \sin\theta)^2 \leq y^2 + 1$이다. 이를 첫 번째 결과와 결합하면

$$y^2 + 1 \geq (y\cos\theta - \sin\theta)^2 \geq 4(y-1)^2,$$

이고, 이것이 두 번째 부등식이다.

전개하면 $y^2 + 1 \geq 4y^2 - 8y + 4$, 즉

$$3y^2 - 8y + 3 \leq 0.$$

이다. $3y^2 - 8y + 3 = 0$의 근은 $y = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-36}}{6} = \dfrac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$이고, 이 이차식은 최고차항의 계수(leading coefficient)가 양수이므로 정확히 두 근 사이에서 0 이하이다. 그러므로

$$\frac{4-\sqrt{7}}{3} \leq y \leq \frac{4+\sqrt{7}}{3}.$$

소문항 (ii)

$y = \frac{1}{3}(4+\sqrt{7})$이라 하면 $y - 1 = \frac{1}{3}(1+\sqrt{7}) > 0$이다. 이때

$$y^2 + 1 = \frac{16 + 8\sqrt{7} + 7}{9} + 1 = \frac{32 + 8\sqrt{7}}{9},$$
$$4(y-1)^2 = \frac{4(1 + 2\sqrt{7} + 7)}{9} = \frac{32 + 8\sqrt{7}}{9}.$$

두 값이 같고 $2(y-1) > 0$이므로, 양의 제곱근을 취하면 $\sqrt{y^2+1} = 2(y-1)$을 얻는다. 이것이 증명할 내용이었다. (당연한 결과이다. y는 $3y^2 - 8y + 3 = 0$의 근이고, 이 방정식은 곧 $y^2 + 1 = 4(y-1)^2$이다.)

생각해 보기 이 등식은 소문항 (i)의 부등식 사슬에 대해 무엇을 말해 주는가?

사슬 $y^2 + 1 \geq (y\cos\theta - \sin\theta)^2 \geq 4(y-1)^2$의 양 끝이 이제 같으므로, 두 부등식은 모두 등식이다.

판별식이 0이므로, x에 대한 이차방정식은 중근(repeated root)

$$x = -\frac{y\cos\theta - \sin\theta}{2(y-1)}.$$

을 가진다.

θ에 대한 상계가 실제로 달성되므로, $y\sin\theta + \cos\theta = 0$이고, 따라서

$$\tan\theta = -\frac{1}{y} = -\frac{3}{4+\sqrt{7}} = -\frac{3(4-\sqrt{7})}{16-7} = \frac{\sqrt{7}-4}{3}.$$

이다. (여기서 $\cos\theta \neq 0$이다. 그렇지 않으면 $\sin\theta = 0$도 되기 때문이다.) 또한 $(y\cos\theta - \sin\theta)^2 = y^2 + 1 = 4(y-1)^2$이므로 $y\cos\theta - \sin\theta = \pm 2(y-1)$이고, 따라서

$$x = \mp 1.$$

이다. 구체적으로, $(\cos\theta, \sin\theta)$는 $(y, -1)$과 평행하다. 같은 방향을 가리키면 $\cos\theta > 0$이고 $\sin\theta < 0$이므로 $y\cos\theta - \sin\theta = +2(y-1)$이고 $x = -1$이다. 반대 방향을 가리키면 $\cos\theta < 0$이고 $\sin\theta > 0$이므로 $x = 1$이다. 두 경우 모두

$$x = \pm 1, \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{7}-4}{3}.$$

이다. 사실 두 경우는 하나이다. x를 $-x$로, θ를 $\theta + \pi$로 바꾸어도 y는 변하지 않기 때문이다.

검산

- $x = 1$에서 식은 $y = \dfrac{2+\sin\theta}{2+\cos\theta}$이다. $\tan\theta = \frac{1}{3}(\sqrt{7}-4) \approx -0.4514$를 만족하는 제2사분면(quadrant)의 θ를 택하면 $\theta \approx 2.7176$이고, 이때 $y \approx 2.21525$로 $\frac{1}{3}(4+\sqrt{7}) \approx 2.21525$와 일치한다.
- 컴퓨터로 실수 x와 θ를 무작위로 많이 뽑아 보면, y의 값은 0.45142와 2.21524 사이에 머물렀고, 이는 경계 $\frac{1}{3}(4 \mp \sqrt{7}) \approx 0.451416$과 2.215250의 바로 안쪽이다.
- 눈여겨볼 만한 깔끔한 우연이 있다. $\tan\theta = -\frac{1}{3}(4-\sqrt{7})$은 하한에 음의 부호를 붙인 값인데, 이는 두 경계가 서로 역수(reciprocal)이기 때문이다(두 값의 곱은 $\frac{1}{9}(16-7) = 1$이다).

흔한 실수

- $y = 1$인 경우를 빠뜨리는 것. 이 경우 x에 대한 방정식은 이차방정식이 아니므로 판별식 논증을 그대로 적용할 수 없다.

- $\sqrt{y^2+1} = -2(y-1)$로 두거나 부호를 확인하지 않는 것. 여기서 양의 제곱근이 맞는 것은 오직 $y > 1$이기 때문이다.
- x의 값을 하나만 답하는 것. $x = 1$과 $x = -1$이 모두 나타나며, 각각 θ는 서로 다른 사분면에 있다.

STEP 너머

단계 $(y\cos\theta - \sin\theta)^2 \leq (y^2+1)(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$는 코시-슈바르츠 부등식 $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$의 2차원인 경우이며, 등호는 정확히 두 벡터가 평행할 때 성립한다. 이 부등식은 모든 내적 공간(inner-product space)에서 성립하며, 대학 1학년 해석학과 선형대수학에서 가장 많이 쓰이는 도구 가운데 하나이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이를 기하적으로 전개하고, Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 이 부등식이 해석학에서 활용되는 모습을 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.