풀이

STEP II 2016, 문제 3

순수수학 • 다항식의 근

> **STEP II 2016, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q3

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 항등식(identity) $\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_{n-1}(x) + \dfrac{x^n}{n!}$에 바탕을 둔다. 이를 소문항 (i)과 함께 쓰면, f_n의 근(root) a에서의 기울기가 $\mathrm{f}_n'(a) = -a^n/n!$임을 알 수 있다. 따라서 근을 구하지 않고도 모든 근에서의 기울기(gradient)를 알 수 있다. 모든 근의 부호가 같으므로 그 기울기들의 부호도 모두 같다. 그런데 곡선은 그 사이에서 한 번 아래로 축을 지나지 않고서는 위쪽 방향으로 두 번 연달아 축을 지날 수 없다.

풀이

이 풀이 전체에서 $\mathrm{f}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$로 쓴다.

소문항 (i)

항별로 미분(term by term differentiation)하면 상수항 1은 사라지고, $1 \le k \le n$에 대해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^k}{k!}\right) = \frac{kx^{k-1}}{k!} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}.$$

이다. 따라서

$$\mathrm{f}_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!} = \mathrm{f}_{n-1}(x),$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

$x \geq 0$이면 $\mathrm{f}_n(x)$의 모든 항은 음이 아니고 첫째 항이 1이므로 $\mathrm{f}_n(x) \geq 1 > 0$이다. 따라서 어떤 근도 $a \geq 0$을 만족할 수 없고, 모든 실근은 $a < 0$이다. ($n = 0$일 때는 $\mathrm{f}_0 = 1$이 근을 전혀 갖지 않으므로 이 결론과 모순되지 않는다.)

소문항 (iii)

정의로부터 $\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_{n-1}(x) + \dfrac{x^n}{n!}$이다. $\mathrm{f}_n(a) = 0$이면 소문항 (i)에 의해

$$\mathrm{f}_n'(a) = \mathrm{f}_{n-1}(a) = \mathrm{f}_n(a) - \frac{a^n}{n!} = -\frac{a^n}{n!},$$

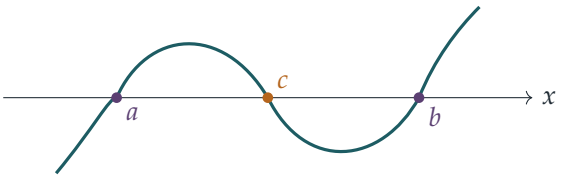
이고, 마찬가지로 $\mathrm{f}_n'(b) = -b^n/n!$이다. 따라서

$$\mathrm{f}_n'(a)\,\mathrm{f}_n'(b) = \frac{(ab)^n}{(n!)^2} > 0,$$

이다. 소문항 (ii)에 의해 $a < 0$이고 $b < 0$이므로 $ab > 0$이기 때문이다. 이것이 구하는 부등식이다. 특히 두 기울기 모두 0이 아니며, 둘의 부호가 같다.

> **생각해 보기** 두 기울기의 부호가 같으면 왜 그 사이에 또 다른 근이 반드시 있어야 할까?

$a < b$로 두고 두 기울기가 모두 양수라고 하자(음수인 경우는 이를 뒤집은 것이다). $\mathrm{f}_n'(a) > 0$이므로 곡선은 a에서 위쪽으로 축을 지나고, 따라서 x가 a보다 조금 크면 $\mathrm{f}_n(x) > 0$이다. 또 $\mathrm{f}_n'(b) > 0$이므로 곡선은 b에서도 위쪽으로 축을 지나고, 따라서 x가 b보다 조금 작으면 $\mathrm{f}_n(x) < 0$이다. 어떤 점에서 양수이고 그보다 뒤의 점에서 음수인 연속함수(continuous function)는 그 사이에서 반드시 0이 되므로(중간값 정리(intermediate value theorem)), $a < c < b$인 어떤 c에 대해 $\mathrm{f}_n(c) = 0$이다.



곡선은 a를 지나며 올라가고 b를 지나며 올라가므로, 그 사이 어딘가에서 축을 지나 내려와야 한다.

실근은 많아야 하나이다. $(*)$가 서로 다른 실근을 두 개 이상 갖는다고 가정하자. 이는 n차 다항식(polynomial)이므로 근의 개수가 유한하고, 따라서 그중 두 근 $a < b$를 그 사이에 다른 근이 없도록, 즉 **이웃하도록** 고를 수 있다. 그런데 위의 논증은 a와 b 사이에 엄격히 놓인 근 c를 만들어 내므로 모순이다. 따라서 $(*)$의 실근은 많아야 하나이다. (이 논증은 문제에서

처럼 $n \geq 2$를 사용했다. $n = 1$이면 유일한 근은 -1이고 $n = 0$이면 근이 없으므로, 이 결론은 모든 n에 대해 성립한다.)

n이 홀수인 경우. 이때 f_n은 홀수 차수이고 최고차항의 계수(leading coefficient) $1/n!$이 양수이므로, $x \to -\infty$일 때 $\mathrm{f}_n(x) \to -\infty$이고 $x \to +\infty$일 때 $\mathrm{f}_n(x) \to +\infty$이다. 중간값 정리에 의해 이 함수는 실근을 적어도 하나 가지며, 따라서 **정확히 하나**를 갖는다.

n이 짝수인 경우. $n = 0$이면 근이 없다. 짝수 $n \geq 2$에 대해서는 $x \to \pm\infty$일 때 $\mathrm{f}_n(x) \to +\infty$이므로, f_n은 어떤 점 x_0에서 전역 최솟값(global minimum)을 가지며, 그 점에서 $\mathrm{f}_n'(x_0) = \mathrm{f}_{n-1}(x_0) = 0$이다. $\mathrm{f}_{n-1}(0) = 1 \neq 0$이므로 $x_0 \neq 0$이고, 따라서

$$\mathrm{f}_n(x_0) = \mathrm{f}_{n-1}(x_0) + \frac{x_0^n}{n!} = \frac{x_0^n}{n!} > 0,$$

이다. n이 짝수이기 때문이다. 최솟값이 양수이므로 모든 x에 대해 $\mathrm{f}_n(x) > 0$이고, $(*)$는 **실근을 갖지 않는다**.

(다른 방법: 근 a가 있다면 $\mathrm{f}_n'(a) \neq 0$이므로 그 근은 단순근(simple root)이고, 따라서 f_n은 그 점에서 부호가 바뀐다. 그런데 최고차항의 계수가 양수인 짝수 차 다항식이 정확히 한 번만 부호가 바뀐다면, 충분히 큰 모든 x에서 음수이거나 절댓값이 매우 큰 음수인 모든 x에서 음수여야 하는데, 이는 불가능하다.)

검산

- $n = 1$: $1 + x = 0$은 유일한 근 -1을 갖는다. $n = 2$: $1 + x + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\left((x+1)^2 + 1\right) > 0$이므로 근이 없다. 두 경우 모두 결론과 맞는다.
- $n = 3$: 근은 약 -1.596이고, 그 점에서 $\mathrm{f}_3'(a) = \mathrm{f}_2(a) \approx 0.678 = -a^3/3!$로 예측과 같다.
- $n \leq 25$인 모든 경우에 대해 f_n의 부호 변화를 컴퓨터로 확인한 결과, 홀수 n에서는 근이 정확히 하나, 짝수 n에서는 근이 하나도 없었다.

흔한 실수

- 기울기의 곱이 양수임을 보이면서 왜 $ab > 0$인지 밝히지 않는 것. 여기에는 소문항 (ii)가 필요하다.
- 두 근을 이웃하도록 고르지 않은 채, 임의의 두 근 사이에 근이 있다는 사실만으로 "근은 많아야 하나"라고 결론짓는 것. 모순을 만들어 내는 것은 바로 그 선택이다.
- 짝수 n의 경우 $x_0 \neq 0$임을 확인하지 않는 것. $x_0^n/n! > 0$이 엄격한 부등식이 되려면 이것이 필요하다.

STEP 너머

다항식 f_n은 e^x의 테일러 다항식(Taylor polynomial)이고, 소문항 (i)은 $(e^x)' = e^x$의 유한한 그림자이다. e^x는 결코 0이 되지 않으므로 f_n의 실근이 적은 것은 자연스럽다. 이 다항식들의 복소근을 $1/n$배로 축소하면, $n \to \infty$일 때 세게(Szegő) 곡선이라 불리는 곡선 위로 모여든다. 여기서 사용한 도구인 중간값 정리와 연속함수의 최솟값 존재는 대학의 첫 해석학(analysis) 강의에서 엄밀하게 증명한다. Abbott, *Understanding Analysis*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.