풀이

STEP II 2016, 문제 2

순수수학 • 인수정리

> **STEP II 2016, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q2

핵심 아이디어

$(*)$를 계수에 마침 a와 b가 들어 있는 c에 대한 다항식(polynomial)으로 생각한다. 인수정리(factor theorem)에 따르면 $c-(a+b)$가 인수(factor)가 되는 것은 $c=a+b$를 대입한 값이 영이 될 때, 그리고 그때뿐이다. 인수 하나를 찾으면 a, b, c에 대한 $(*)$의 대칭성(symmetry)이 인수 두 개를 공짜로 더 건네주고, 차수(degree)를 세어 보면 인수분해(factorisation)가 끝난다. 그러면 두 방정식은 변장한 특수한 경우일 뿐이다. 할 일은 이들과 맞아떨어지도록 a, b, c (나중에는 d, e)를 고르는 것이다.

풀이

인수 $a+b-c$

$(*)$를 $F(a,b,c)$로 쓴다. c에 대한 다항식으로 보면, F가 인수 $c-(a+b)$를, 따라서 $a+b-c$를 가질 필요충분조건(if and only if)은 $F(a,b,a+b)=0$이다. $p=a+b$로 놓고 $c=p$로 둔다. 그러면 $a+b+c=2p$이고, $a^2+b^2=p^2-2ab$와 $a^3+b^3=p^3-3abp$를 이용하면

$$a^2+b^2+c^2=2p^2-2ab, \qquad a^3+b^3+c^3=2p^3-3abp.$$

따라서

$$\begin{aligned} F(a,b,a+b) &= 8p^3-6(2p)(2p^2-2ab)+8(2p^3-3abp) \\ &= 8p^3-24p^3+24abp+16p^3-24abp=0, \end{aligned}$$

이므로 요구한 대로 $a+b-c$는 $(*)$의 인수이다.

$(*)$를 완전히 인수분해하기

F는 a, b, c를 어떻게 재배열해도 변하지 않는다. b와 c를 바꾸면 인수 $a+b-c$는 $a+c-b$가 되고, a와 c를 바꾸면 $b+c-a$가 된다. 따라서

$$a+b-c, \qquad b+c-a, \qquad c+a-b$$

세 개가 모두 인수이다. 이들은 서로 다른 일차 다항식(linear polynomial)이고 어느 것도 다른 것의 상수배가 아니므로, 이들의 곱은 F를 나눈다. F의 모든 항의 차수가 3이므로 나머지 인수의 차수는 0이다. 즉 그것은 상수 k이고

$$F(a,b,c) = k(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

k를 구하기 위해 $a=b=c=1$을 대입한다. 좌변은 $27-6\cdot 3\cdot 3+8\cdot 3=-3$이고 곱은 1이다. 따라서 $k=-3$이고

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3-6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+8(a^3+b^3+c^3)\\ = -3(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).\end{aligned}$$

소문항 (i)

방정식의 가운데 항과 마지막 항을 나누어 $(*)$의 꼴로 만든다.

$$(x+1)^3-6(x+1)\left(x^2+\tfrac{5}{2}\right)+8\left(x^3+\tfrac{13}{4}\right)=0.$$

생각해 보기 어떤 a, b, c의 값이 이것을 정확히 $(*)$로 만드는가?

b, c를 상수로 두고 $a=x$로 해 본다. 필요한 조건은 다음과 같다.

$$b+c=1, \qquad b^2+c^2=\tfrac{5}{2}, \qquad b^3+c^3=\tfrac{13}{4}.$$

앞의 두 식에서 $2bc=(b+c)^2-(b^2+c^2)=-\tfrac{3}{2}$이므로 $bc=-\tfrac{3}{4}$이다. 그러면

$$b^3+c^3=(b+c)^3-3bc(b+c)=1+\tfrac{9}{4}=\tfrac{13}{4},$$

이므로 세 번째 조건은 저절로 성립한다. 이제 b, c는 $t^2-t-\tfrac{3}{4}=0$, 즉 $(2t-3)(2t+1)=0$의 근이므로 $b=\tfrac{3}{2}, c=-\tfrac{1}{2}$이다.

$a=x, b=\tfrac{3}{2}, c=-\tfrac{1}{2}$로 두면 인수분해에서 다음을 얻는다.

$$a+b-c=x+2, \qquad b+c-a=1-x, \qquad c+a-b=x-2,$$

따라서 방정식은 $-3(x+2)(1-x)(x-2)=0$이 되고, 해는

$$x=-2, \quad x=1, \quad x=2.$$

소문항 (ii)

네 변수 식을 $G(a,b,d,e)$로 쓴다. ($c = d+e$로 놓으면 $a+b-d-e$가 $a+b-c$처럼 보이므로 이 인수를 짐작할 수 있다. 하지만 직접 확인하는 것도 그만큼 빠르다.) G를 e에 대한 다항식으로 보면, 인수정리에 의해 $a+b = d+e$일 때 $G = 0$임을 보이면 충분하다. $p = a+b = d+e$라 하자. 앞에서와 똑같이 $a^2+b^2 = p^2-2ab$, $d^2+e^2 = p^2-2de$, $a^3+b^3 = p^3-3abp$, $d^3+e^3 = p^3-3dep$이므로, $q = ab+de$로 두면

$$\begin{aligned} G &= (2p)^3 - 6(2p)(2p^2-2q) + 8(2p^3-3pq) \\ &= 8p^3 - 24p^3 + 24pq + 16p^3 - 24pq = 0. \end{aligned}$$

따라서 $a+b-d-e$는 G의 인수이다.

이제 G는 a, b, d, e를 어떻게 재배열해도 변하지 않는다. 인수 $a+b-d-e$는 네 문자를 두 쌍 $\{a,b\}$와 $\{d,e\}$로 나누는 데서 나온다. 쌍으로 나누는 나머지 두 방법에서 다음 인수들을 얻는다.

$$a+d-b-e \quad (\text{교환: } b,d), \qquad a+e-b-d \quad (\text{교환: } b,e).$$

이 세 일차 인수는 서로 다르고 어느 것도 다른 것의 배수가 아니며, G는 차수가 3인 동차식(homogeneous polynomial)이므로 어떤 상수 k에 대해 $G = k(a+b-d-e)(a+d-b-e)(a+e-b-d)$이다. $a = 1$, $b = d = e = 0$을 대입하면 좌변은 $1-6+8 = 3$, 우변은 k이므로

$$G = 3(a+b-d-e)(a+d-b-e)(a+e-b-d).$$

방정식에 대해서는 $a = x$로 두고, 다음을 만족하는 상수 b, d, e를 잡는다.

$$b+d+e = 6, \qquad b^2+d^2+e^2 = 14, \qquad b^3+d^3+e^3 = 36.$$

수 $1, 2, 3$이 조건을 만족한다. $1+2+3 = 6$, $1+4+9 = 14$, $1+8+27 = 36$. 따라서 $a = x$, $b = 1$, $d = 2$, $e = 3$으로 두면 방정식은 정확히 $G = 0$이고, 이는 다음과 같이 인수분해된다.

$$3(x+1-2-3)(x+2-1-3)(x+3-1-2) = 3(x-4)(x-2)x = 0.$$

따라서 해는

$$x = 0, \quad x = 2, \quad x = 4.$$

검산

- $(*)$에 $a = b = 1$, $c = 2$를 대입하면 $64-6\cdot4\cdot6+8\cdot10 = 0$으로, 인수 $a+b-c$가 예측하는 대로이다.
- (i)에서 $x = 1$이면 $8-3\cdot2\cdot7+2\cdot17 = 8-42+34 = 0$이다.

- (ii)에서 $x = 0$이면 $216 - 6 \cdot 6 \cdot 14 + 8 \cdot 36 = 216 - 504 + 288 = 0$이고, $x = 4$이면 $1000 - 6 \cdot 10 \cdot 30 + 8 \cdot 100 = 0$이다.
- 인수분해는 변수에 수천 개의 무작위 유리수 값을 넣어 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- 상수를 잊는 실수: $(*)$는 인수들의 곱 자체가 아니라 그 곱의 -3배이다. 편리한 값을 대입하여 항상 k를 확정해야 한다.
- (ii)에서 인수를 세 개보다 많이 나열하는 실수. 예를 들어 a와 d를 바꾸면 $d + b - a - e$가 나오는데, 이것은 $-(a + e - b - d)$일 뿐이다. 진정으로 서로 다른 세 인수는 네 문자를 두 개씩 짝짓는 세 가지 방법에서 나온다.
- 모든 것을 무작정 전개하는 실수. 그래도 답은 나오지만 길고 실수하기 쉽다. 방정식을 항등식(identity)에 맞추는 것이 이 문제의 핵심이다.

STEP 너머

인수정리는 임의의 체(field) 위에서 성립하며, 여기서는 변수 하나를 뺀 나머지를 모두 상수로 취급하여 여러 변수의 다항식에 적용하였다. 대칭성과 다항식의 유일 인수분해(unique factorisation)를 함께 쓰면 강력하다. 대칭다항식(symmetric polynomial) 이론에 따르면 모든 대칭다항식은 기본 대칭다항식 $a + b + c$, $ab + bc + ca$, abc로 나타낼 수 있으며, 이것이 (i)에서 b, c에 대한 조건 뒤에 숨은 구조이다. 덧붙여, 곱 $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$는 삼각형의 넓이에 대한 헤론(Heron)의 공식에 나타나는 바로 그 식이다. 다항식환(polynomial ring)과 인수분해에 대해 더 알고 싶다면 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.