풀이

STEP II 2016, 문제 11

역학 • 포물체의 충돌

> **STEP II 2016, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q11

핵심 아이디어

두 입자는 **같은** 시각에 두 좌표가 모두 일치할 때 충돌(collide)한다. 따라서 하나의 미지수 t를 공유하는 두 방정식을 얻고, 한 방정식을 다른 방정식으로 나누면 t가 소거된다. 소문항 (ii)의 요령은 중력이 매 순간 총알과 표적을 정확히 같은 양 $\frac{1}{2}gt^2$만큼 아래로 끌어내린다는 점을 알아차리는 것이다. 따라서 둘이 만나는지 여부는 소문항 (i)의 중력 없는 운동으로 결정되고, 중력은 둘이 만날 때 표적이 어디에 있는지를 따질 때에만 중요하다.

풀이

소문항 (i)

첫 번째 입자를 $P((a,0)$에서 출발), 두 번째 입자를 $Q((0,b)$에서 출발)라 하자. 두 입자가 시각 t에 충돌한다고 가정한다. x좌표와 y좌표를 각각 같게 놓으면

$$\begin{aligned} a + ut\cos\alpha &= vt\cos\beta, & \text{따라서} \quad t\left(v\cos\beta - u\cos\alpha\right) &= a, \\ ut\sin\alpha &= b + vt\sin\beta, & \text{따라서} \quad t\left(u\sin\alpha - v\sin\beta\right) &= b. \end{aligned}$$

$a > 0$이므로 첫 번째 방정식에서 $t \neq 0$이다(두 입자는 서로 다른 점에서 출발한다). 그러므로 $t > 0$이고, 두 번째 방정식을 첫 번째 방정식으로 나눌 수 있다.

$$\frac{u\sin\alpha - v\sin\beta}{v\cos\beta - u\cos\alpha} = \frac{b}{a} = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

(분모는 $a/t \neq 0$이다.) 양변에 분모를 곱하면

$$\cos\theta\left(u\sin\alpha - v\sin\beta\right) = \sin\theta\left(v\cos\beta - u\cos\alpha\right),$$

이고, u가 있는 항을 좌변에, v가 있는 항을 우변에 모으면

$$u(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta) = v(\sin\beta\cos\theta + \cos\beta\sin\theta).$$

$\sin(A+B)$에 대한 삼각함수의 덧셈정리(compound-angle formula)에 의해 이는

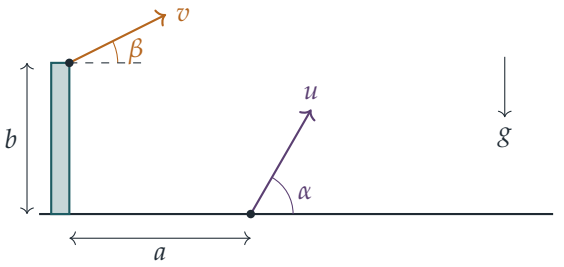
$$u\sin(\theta+\alpha) = v\sin(\theta+\beta),$$

이므로 증명이 끝난다. 나중을 위해 두 가지 사실도 적어 둔다. $a, b, t > 0$이므로

$$v\cos\beta > u\cos\alpha \qquad \text{그리고} \qquad u\sin\alpha > v\sin\beta. \tag{$*$}$$

소문항 (ii)

총알과 표적을 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 입자로 모형화한다. 탑의 밑을 원점으로 잡고, x축은 표적의 발사 지점을 지나는 수평선(탑에서 멀어지는 방향)으로, y축은 연직 위쪽으로 잡는다. 명중이 가능하려면 총알을 표적 쪽으로 쏘아야 하므로, 둘 다 이 연직 평면 안에서 움직인다.



시각 t에(둘 중 어느 것도 땅에 닿기 전), 표적과 총알의 위치는

$$T = (a + ut\cos\alpha,\ ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2), \qquad B = (vt\cos\beta,\ b + vt\sin\beta - \tfrac{1}{2}gt^2).$$

이는 소문항 (i)의 위치를 각각 같은 양 $\frac{1}{2}gt^2$만큼 아래로 옮긴 것과 정확히 같다.

> **생각해 보기** 소문항 (i)에는 중력이 없었는데, 왜 소문항 (i)의 결과를 쓸 수 있을까?

명중은 $T = B$일 때 일어난다. y에 대한 방정식에서 $-\frac{1}{2}gt^2$ 항이 양변에 나타나 소거되므로, 충돌 조건은 소문항 (i)의 조건과 글자 하나 다르지 않다.

$$t\,(v\cos\beta - u\cos\alpha) = a, \qquad t\,(u\sin\alpha - v\sin\beta) = b.$$

특히 소문항 (i)과 $(*)$가 그대로 성립하고, 명중 시각은

$$t = \frac{b}{u\sin\alpha - v\sin\beta},$$

이며, $(*)$에 의해 분모는 양수이다.

이 순간 표적이 아직 공중에 있을 필요충분조건은 표적의 높이가 양수인 것이다.

$$ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2 > 0 \iff t < \frac{2u\sin\alpha}{g},$$

여기서 $\frac{1}{2}t > 0$으로 나누었다. 명중 시각을 대입하면

$$\frac{b}{u\sin\alpha - v\sin\beta} < \frac{2u\sin\alpha}{g}.$$

두 분모가 모두 양수이므로 양변에 $g(u\sin\alpha - v\sin\beta)$를 곱해도 부등호의 방향은 바뀌지 않고, 따라서

$$2u\sin\alpha\,(u\sin\alpha - v\sin\beta) > bg,$$

를 얻어 증명이 끝난다. (명중 순간 총알은 표적과 같은 높이에 있으므로 총알 역시 지면 위에 있다.)

왜 $\alpha > \beta$이어야 하는가

명중하려면 두 입자가 소문항 (i)의 의미에서 충돌해야 함을 보았으므로

$$u\sin(\theta+\alpha) = v\sin(\theta+\beta),$$

이 성립한다. 여기서 $\tan\theta = b/a$이고, $(*)$에서 $u\sin\alpha > v\sin\beta$이기도 하다. θ, α, β가 예각이므로 $\theta+\alpha$와 $\theta+\beta$는 0과 π 사이에 있고, 따라서 여기 나오는 네 사인값은 모두 양수이다. 등식을 부등식으로 나누면 부등호 방향이 뒤집힌다.

$$\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\sin\alpha} < \frac{\sin(\theta+\beta)}{\sin\beta}.$$

전개하면 $\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{\sin\alpha} = \sin\theta\cot\alpha + \cos\theta$이고 β에 대해서도 마찬가지이므로

$$\sin\theta\cot\alpha < \sin\theta\cot\beta \iff \cot\alpha < \cot\beta,$$

이다($\sin\theta > 0$이므로). $(0, \frac{\pi}{2})$에서 코탄젠트(cotangent)는 순감소하므로 $\alpha > \beta$이다.

물리적으로 보면, 중력이 상쇄되므로 총알에 대한 표적의 상대 운동은 등속 직선 운동이다. 그 상대 속도(relative velocity)는 표적의 출발점 $(a, 0)$에서 총이 있는 $(0, b)$를 향해야 하므로 뒤쪽 위를 향해야 한다. $(*)$에 의해 표적은 총알보다 수평 방향으로는 느리고 연직 방향으로는 빨라야 하며, 이로 인해 표적의 경로가 더 가팔라야 한다. 즉 $\tan\alpha > \tan\beta$이다. ($(*)$의 두 부등식을 서로 나누어도 같은 결론을 바로 얻는다.)

검산

$u = 20$, $\alpha = 60°$, $v = 15$, $\beta = 30°$, $t = 1$에서 명중, $g = 9.8$인 경우를 시험해 보자. 충돌 방정식에서 $a \approx 2.990$, $b \approx 9.821$이므로 $\theta \approx 73.06°$이다. 그러면 $u\sin(\theta + \alpha) \approx 14.612$, $v\sin(\theta + \beta) \approx 14.612$로 일치한다. 명중 순간 표적의 높이는 $17.32 - 4.9 \approx 12.42 > 0$이고, 실제로 $2u\sin\alpha(u\sin\alpha - v\sin\beta) \approx 340.2 > bg \approx 96.2$이다. 수천 번의 무작위 발사에 대한 컴퓨터 검사에서도, 명중 순간 표적이 아직 공중에 있을 때 정확히 이 부등식이 성립하고, 모든 명중에서 $\alpha > \beta$임이 확인되었다.

흔한 실수

- 두 입자가 **같은** 시각에 같은 곳에 있어야 한다는 점을 잊고, 서로 다른 두 시각에 대해 푸는 것.
- $u\sin\alpha - v\sin\beta$가 양수임을 먼저 확인하지 않고 양변에 곱하는 것. $t > 0$이고 $b > 0$이므로 이 값은 양수이다.
- $u\sin\alpha > v\sin\beta$만으로 $\alpha > \beta$를 주장하는 것. 속력도 함께 비교하지 않으면 이 부등식은 각에 대해 아무것도 말해 주지 않는다.

STEP 너머

중력이 상쇄되는 것은 갈릴레이 상대성(Galilean relativity)의 한 예이다. 총알과 함께 자유 낙하하는 기준계에서 표적은 등속 직선 운동을 하므로, "표적을 곧장 겨냥하라"가 통한다. 이것이 고전적인 "원숭이와 사냥꾼(monkey and hunter)" 실험이며, 관성 기준계(inertial frame, 또는 자유 낙하 기준계)라는 개념은 대학 1학년 역학의 출발점이자, 나중에는 일반 상대성 이론(general relativity)의 등가 원리(equivalence principle)의 출발점이 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 상대 운동과 기준계(reference frame)를 신중하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.