풀이

STEP II 2016, 문제 10

역학 • 마찰과 평형

> **STEP II 2016, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q10

핵심 아이디어

삼각형에 작용하는 것은 두 가지뿐이다. 질량중심(centre of mass) G에 작용하는 무게, 그리고 접촉점 P에서 못(peg)이 가하는 하나의 접촉력(contact force)이다. 평형(equilibrium) 상태에 있는 두 힘은 크기가 같고 방향이 반대이며 같은 직선 위에 있어야 하므로, 삼각형은 G가 P의 바로 아래에 올 때까지 돌아간다. 그러면 문제는 이렇게 바뀐다. 못의 반작용은 BC의 법선에서 얼마나 크게 기울어져야 하며, 마찰은 그만큼을 버틸 만큼 충분히 강한가? 따라서 첫 번째 할 일은 G의 위치를 찾는 것이다.

풀이

모형과 질량중심

철사를 단위 길이당 질량이 같은 균일한 막대 세 개로 보고, 못은 수직항력(normal reaction) R(BC에 수직)과 마찰력(friction force) F(BC 방향)를 주는 하나의 접촉점으로 본다. 이때 $F \le \mu R$이다.

$AB = AC = b$라 하고 M을 BC의 중점이라 하자. A에서의 각이 2θ이므로 직선 AM은 이 각을 이등분하고 BC에 수직이다. 따라서

$$BM = MC = b\sin\theta, \qquad AM = b\cos\theta, \qquad BC = 2b\sin\theta.$$

대칭성에 의해 G는 AM 위에 있다. 거리는 BC에서 A 쪽으로 잰다. 막대 AB와 AC는 각각 질량이 b에 비례하고, 그 중심은 각자의 중점으로 BC에서 거리가 $\frac{1}{2}b\cos\theta$인 곳에 있다. 막대 BC는 질량이 $2b\sin\theta$에 비례하고 그 중심은 BC 위에 있다. 따라서 거리 $d = GM$은

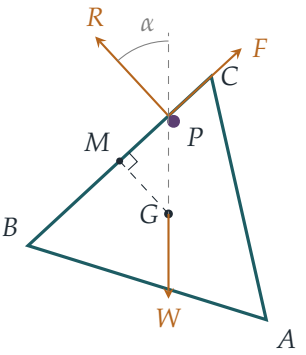
$$d = \frac{b\cdot\frac{1}{2}b\cos\theta + b\cdot\frac{1}{2}b\cos\theta + 2b\sin\theta\cdot 0}{b+b+2b\sin\theta} = \frac{b\cos\theta}{2(1+\sin\theta)}.$$

못이 일반적인 점에 있을 때의 평형

못이 BC의 점 P에 닿아 있고 $MP = x$라 하자. 여기서 $0 \le x \le b\sin\theta$이다(대칭성에 의해 P가 M과 C 사이에 있다고 해도 된다). 삼각형은 못 아래에 매달려 있으므로, 못은 삼각형 안쪽에 있고 BC가 그 위에 얹혀 있다.

> **생각해 보기** 삼각형은 어떤 각도로도 매달릴 수 있다. 실제로 어느 각도를 취하는지 어떻게 알 수 있을까?

삼각형에 작용하는 힘은 G에서의 무게 W와 P에서 못이 가하는 전체 접촉력이다. 힘이 두 개뿐이므로, 평형이 되려면 두 힘의 크기가 같고 방향이 반대여야 하며(따라서 접촉력은 연직 위 방향의 W이다), 같은 직선 위에서 작용해야 한다(그렇지 않으면 두 힘이 짝힘(couple)을 이룬다). 따라서 PG는 연직이어야 한다. 즉 삼각형은 G가 P의 바로 아래에 오도록 자리 잡는다.



α를 PG(연직선)와 BC의 법선 GM 사이의 각이라 하자. 직각삼각형 PMG에서

$$\tan\alpha = \frac{MP}{GM} = \frac{x}{d}.$$

BC의 법선은 연직선과 각 α를 이루고, BC는 수평선과 각 α를 이룬다. BC에 수직인 방향과 BC를 따르는 방향으로 힘을 분해하면

$$R = W\cos\alpha, \qquad F = W\sin\alpha.$$

$0 \le \alpha < \frac{1}{2}\pi$이므로 둘 다 음이 아니고, $R > 0$이다. 삼각형이 미끄러지지 않고 그대로 있을 조건은 $F \le \mu R$, 즉

$$\mu \ge \tan\alpha = \frac{x}{d}.$$

BC의 모든 점

우변 x/d는 x에 대해 증가하므로, 이 조건은 P가 끝점, 즉 $x = b\sin\theta$에 있을 때 가장 만족하기 어렵다. BC의 모든 점에서 평형이 가능할 필요충분조건은 그 끝점에서 평형이 가능한

것이다.

$$\mu \geq \frac{b\sin\theta}{d} = b\sin\theta \cdot \frac{2(1+\sin\theta)}{b\cos\theta} = 2\tan\theta\,(1+\sin\theta),$$

이것이 구하는 조건이다. 이 조건이 성립하면 $\mu \geq x/d$가 $[0, b\sin\theta]$의 모든 x에 대해 성립하므로, 못이 BC의 어느 점에 있든 삼각형이 정지해 있을 수 있다.

검산

- $x = 0$(못이 M에 있을 때)이면 $\alpha = 0$이다. 삼각형은 BC가 수평인 채로 매달리고, 대칭성에서 예상되듯 마찰이 전혀 필요 없다.
- $\theta = 30^\circ$이면 삼각형은 정삼각형이고 $d = \frac{1}{3}b\cos 30^\circ$이다. 이때 G는 무게중심(centroid), 즉 BC에서 높이 $b\cos 30^\circ$의 3분의 1만큼 올라간 곳에 있어야 한다. 실제로 그렇다. 조건은 $\mu \geq 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2} = \sqrt{3} \approx 1.732$가 된다. 꼭짓점에서는 BC가 수평선과 60°를 이루어야 한다.
- $\theta \to 0$이면 삼각형은 가느다란 뾰족한 모양이 되고, BC는 한없이 줄어들며 한계값은 0으로 간다. $\theta \to \frac{1}{2}\pi$이면 길고 납작한 띠가 되고 한계값은 한없이 커진다. 둘 다 직관과 맞는다.
- 컴퓨터로 확인한 결과, 세 막대를 작은 조각 여러 개로 나누어 G를 구하고 임의의 θ와 b에 대해 BC를 따라 201개의 점에서 힘을 분해했더니 $2\tan\theta(1+\sin\theta)$와 10^{-11} 이내로 일치했다.

흔한 실수

- **철사**의 질량중심 대신 삼각형 **박판**(lamina)의 무게중심(AM을 따라 3분의 1 올라간 곳)을 쓰는 실수. 철사 틀은 질량이 변에 있으므로 BC는 $2b\sin\theta$의 가중치로 들어간다.
- BC가 수평을 유지한다고 가정하고 모멘트(moment)를 구하려는 실수. 삼각형은 G가 못 아래에 올 때까지 기울어지며, 바로 이 기울어진 각을 마찰이 감당해야 한다.
- BC의 한 점만 확인하는 실수. 최악의 경우는 BC의 끝점이며, 한계값을 정하는 것도 바로 그 점이다.

STEP 너머

$\tan\alpha \leq \mu$라고 쓰는 것은 전체 접촉력이 **마찰원뿔**(cone of friction), 즉 법선을 축으로 하고 반각이 $\arctan\mu$인 원뿔 안에 있어야 한다는 뜻이다. 이렇게 보면 많은 마찰 문제(사다리, 쐐기, 거친 못)가 거의 기하 문제가 되며, 이 관점은 접촉점이 여러 개인 강체(rigid body)로

일반화된다. 이때 문제는 각 원뿔 안에서 힘을 적절히 골라 하중과 균형을 이루게 할 수 있는가가 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*는 마찰과 강체의 평형을 이처럼 세심하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.