풀이

STEP II 2016, 문제 1

순수수학 • 매개변수 곡선과 접선

> **STEP II 2016, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q1

핵심 아이디어

좌표 대신 매개변수(parameter)로 생각한다. O에서의 직각 조건은 두 점의 매개변수 p와 q 사이의 매우 간단한 관계식 하나로 바뀌고, 일반적인 점에서의 접선(tangent)은 t에 대한 깔끔한 방정식으로 나타난다. 두 접선의 교점을 구하면 그 좌표는 p와 q의 대칭함수(symmetric function)로 나오며, p와 q 사이의 관계식이 바로 이들을 소거하는 데 필요한 것이다.

풀이

일반적인 점에서의 접선

매개변수가 t인 점에서

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3t}{2} \qquad (t \neq 0).$$

따라서 (t^2, t^3)에서의 접선은 $y - t^3 = \frac{3t}{2}(x - t^2)$, 즉

$$2y = 3tx - t^3. \qquad (*)$$

이다. ($t = 0$일 때 이 식은 $y = 0$이 되고, 이는 첨점(cusp)에서의 접선이지만 이 점은 필요하지 않다.)

직각 조건

$P = (p^2, p^3)$, $Q = (q^2, q^3)$이라 하자. $\angle POQ$가 의미를 가지려면 두 점 모두 O가 아니어야 하므로 $p \neq 0$이고 $q \neq 0$이다. 이 각이 직각일 필요충분조건은 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$이다.

$$p^2q^2 + p^3q^3 = p^2q^2(1 + pq) = 0.$$

$p^2q^2 \neq 0$이므로 반드시

$$pq = -1.$$

이다. 특히 (두 수의 곱이 음수이므로) $p \neq q$이고, 따라서 P와 Q에서의 접선은 서로 다른 기울기(gradient) $\frac{3p}{2} \neq \frac{3q}{2}$를 가지며 실제로 한 점에서 만난다.

두 접선이 만나는 점

$t = p$와 $t = q$를 대입한 두 $(*)$ 식을 서로 빼면

$$3(p - q)x = p^3 - q^3 = (p - q)(p^2 + pq + q^2).$$

$p - q \neq 0$으로 나누고 $pq = -1$을 이용하면

$$3x = p^2 + pq + q^2 = p^2 + q^2 - 1.$$

이를 $t = p$인 $(*)$에 다시 대입하면

$$\begin{aligned} 2y &= p(p^2 + pq + q^2) - p^3 \\ &= p^2q + pq^2 = pq(p + q) = -(p + q). \end{aligned}$$

> ? **생각해 보기** x와 y를 두 매개변수로 나타냈다. 어떻게 하면 x와 y만의 방정식 하나를 얻을 수 있을까?

y를 제곱한다. 그러면 나타나는 교차항 $2pq$는 이미 아는 상수이고, 남는 것은 $p^2 + q^2$인데, 이는 바로 $3x$에 들어 있는 것이다. 실제로

$$4y^2 = (p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq = p^2 + q^2 - 2 = (3x + 1) - 2 = 3x - 1.$$

따라서 P와 Q에서의 접선은 요구한 대로 $C_2 : 4y^2 = 3x - 1$ 위에서 만난다.

(사실 C_2의 모든 점이 이렇게 얻어진다. p가 모든 양의 실수를 움직일 때 $2y = -(p + q) = \frac{1}{p} - p$는 모든 실숫값을 가지고, 그러면 x는 C_2의 방정식으로 정해진다.)

C_1과 C_2는 만나는가?

C_2의 방정식에 $x = t^2$, $y = t^3$을 대입하면

$$4t^6 = 3t^2 - 1 \iff 4u^3 - 3u + 1 = 0, \quad \text{여기서} u = t^2 \geq 0.$$

분명히 $u=-1$이 근이고, 인수 $u+1$로 나누면

$$4u^3-3u+1=(u+1)(4u^2-4u+1)=(u+1)(2u-1)^2.$$

이다. $u\geq 0$이므로 가능한 것은 $u=\frac{1}{2}$뿐이고, 따라서 $t=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$이다. 그러므로 두 곡선은 **실제로** 만나며, 그 교점은 정확히 다음 두 점이다.

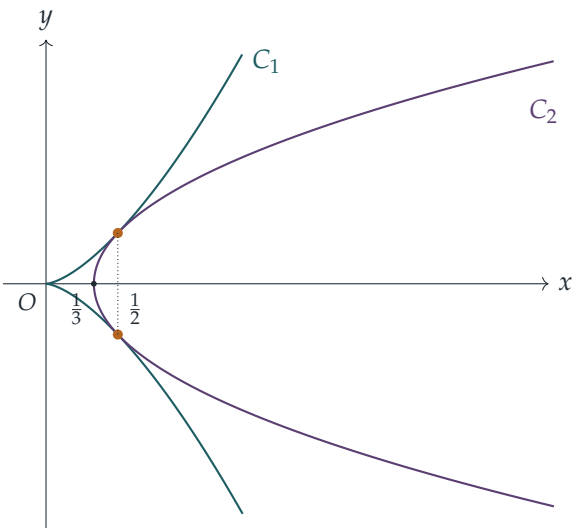
$$\left(\tfrac{1}{2},\,\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)\quad\text{와}\quad\left(\tfrac{1}{2},\,-\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

중근(repeated root)은 더 많은 것을 알려 준다. 두 곡선은 그 점에서 교차하는 것이 아니라 접한다. 이를 직접 확인할 수 있다. $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$에서 C_1의 기울기는 $\frac{3t}{2}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$이다. $4y^2=3x-1$을 음함수 미분(implicit differentiation)하면 $8y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3$이므로, $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}$에서 C_2의 기울기는 $\frac{3}{8y}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$으로 같다. x축에 대한 대칭성에 의해 다른 점에서도 마찬가지이다.

$u\geq 0$일 때 $4u^3-3u+1=(u+1)(2u-1)^2\geq 0$이므로 곡선 C_1은 결코 포물선(parabola)의 안쪽으로 들어가지 않는다. 즉 C_2는 두 접점을 제외하면 C_1의 두 갈래 사이에 놓인다.

개형

C_1은 $y^2=x^3$을 만족한다. 이 곡선은 $x\geq 0$인 영역에 있고, x축에 대하여 대칭이며, O에서 첨점을 가진다(두 갈래 모두 기울기가 $\frac{3t}{2}\to 0$이므로 양의 x축 방향으로 O를 떠난다). C_2는 꼭짓점(vertex)이 $(\frac{1}{3},0)$이고 오른쪽으로 열린 포물선 $x=\frac{1}{3}(4y^2+1)$이며, 역시 x축에 대하여 대칭이다. 포물선은 첨점 안쪽, C_1의 두 갈래 사이에 놓이며, $x=\frac{1}{2}$에서 각 갈래와 한 번씩 접한다.



검산

- $p = 1, q = -1$로 두면 $P = (1,1)$, $Q = (1,-1)$이고 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 1 - 1 = 0$이다. 접선은 $2y = 3x - 1$과 $2y = -3x + 1$이며, C_2의 꼭짓점인 $(\frac{1}{3}, 0)$에서 만난다.
- $p = 2, q = -\frac{1}{2}$로 두면 접선 $2y = 6x - 8$과 $2y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{8}$은 $x = \frac{13}{12}$, $y = -\frac{3}{4}$에서 만나고, $4y^2 = \frac{9}{4} = 3 \cdot \frac{13}{12} - 1$이다.
- 접점 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}) \approx (0.5, 0.35355)$는 $4y^2 = \frac{1}{2} = 3x - 1$을 만족하고, 그 점에서 두 기울기는 모두 ≈ 1.06066이다. $pq = -1$인 무작위 쌍 10^5개를 컴퓨터로 확인한 결과, 모든 교점이 반올림 오차 범위 안에서 C_2 위에 있었다.

흔한 실수

- $p = 0$ 또는 $q = 0$을 제외하는 것을 잊는 실수. $pq = -1$을 얻기 위해 나누기 전에 인수 p^2q^2가 0이 아님을 확인해야 한다.
- $p - q$가 왜 0이 아닌지 밝히지 않고 $p - q$로 나누는 실수.
- "$4u^3 - 3u + 1 = 0$이 근을 가진다"에서 멈추고, 그 근이 $u = t^2 \geq 0$을 만족하는지 확인하지 않는 실수. 근 $u = -1$은 C_1의 어떤 점에도 대응하지 않는다.

STEP 너머

곡선 $y^2 = x^3$은 대표적인 **첨점 삼차곡선**(*cuspidal cubic*)이며, 곡선을 매개변수로 나타낸 곡선과 만나게 하여 중근으로부터 접함을 읽어 내는 기법은 대수기하학(algebraic geometry)의 출발점이다. 교차 중복도(intersection multiplicity)는 곡선들이 몇 번 만나는지를 세고, 베주(Bézout) 정리는 삼차곡선(cubic)과 원뿔곡선(conic)이 제대로 세면 여섯 점에서 만난다고 말한다. 여기서 그 여섯 개는 중근 $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$(모두 합쳐 네 개)와 복소수 쌍 $t = \pm i$이다. 친절한 입문서로는 Kirwan, *Complex Algebraic Curves*(복소 대수곡선)가 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.