풀이

STEP I 2016, 문제 9

역학 • 최대 정지 마찰과 평형

> **STEP I 2016, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q9

핵심 아이디어

A에 대한 모멘트(moment)를 취한다. 그러면 벽에서 작용하는 두 힘이 사라지고, 레일에서의 수직항력(normal reaction)이 마찰과 상관없이 θ로 곧바로 표현된다. 각 마찰력(friction)이 어느 방향으로 작용하는지만 알면, 수평 방향과 수직 방향으로 힘을 분해(resolving)하여 문제를 마무리할 수 있다. 이것이 이 문제의 진짜 핵심이다. 마찰력은 막대가 막 일으키려는 운동을 방해하므로, 끝점 A가 벽을 따라 미끄러져 내려가려 하는지 올라가려 하는지를 판단해야 한다.

풀이

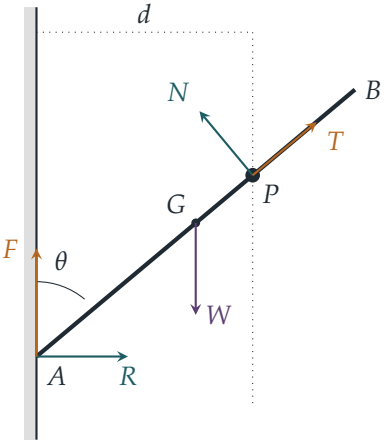
막대를 무게가 W이고 무게중심 G가 A에서 거리 a만큼 떨어져 있는 균일한 강체(rigid body) 막대로, 레일을 막대와 한 점 P에서만 만나는 고정된 직선으로 모형화한다. A에서 레일까지의 수평 거리가 d이고 막대가 연직선과 이루는 각이 θ이므로

$$AP = \frac{d}{\sin\theta}.$$

조건 $a\sin\theta < d$는 G가 A와 P 사이에 있다는 뜻이다.

작용하는 힘은 다음과 같다.

- A에서: 벽에서 멀어지는 수평 방향의 수직항력 R과 벽을 따라 작용하는 마찰력 F;
- P에서: 막대에 수직인 수직항력 N과 막대를 따라 작용하는 마찰력 T;
- G에 작용하는 무게 W.



F와 T의 화살표는 아래에서 다루는 첫 번째 경우의 방향을 나타낸다.

A에 대한 모멘트

N은 막대에 수직이므로 A에 대한 N의 모멘트는 $N \cdot AP$이다. T는 막대를 따라 작용하므로 A에 대한 모멘트가 없고, R와 F도 마찬가지이다. 무게의 팔 길이는 $a\sin\theta$이다. 따라서

$$N\frac{d}{\sin\theta} = Wa\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad N = \frac{Wa\sin^2\theta}{d}. \tag{1}$$

이 식은 막대가 어느 쪽으로 미끄러지려 하든 성립한다.

어느 쪽으로 미끄러지는가?

생각해 보기 A는 벽을 따라 미끄러져 내려가려 하는가, 올라가려 하는가?

먼저 마찰이 전혀 없다고 가정하자. 수직 방향으로 분해하면 $N\sin\theta = W$이어야 하고, (1)과 함께 보면 이는 $a\sin^3\theta = d$를 뜻한다. 그런데 여기서는 $a\sin^3\theta < a\sin\theta < d$이므로 (1)에 의해 $N\sin\theta < W$이다. 즉 수직항력만으로는 막대를 떠받칠 수 없고, 나머지는 마찰력이 메워야 한다. 막대는 **아래쪽으로** 미끄러지려 한다. A가 벽을 따라 내려가면 θ가 감소하고 $AP = d/\sin\theta$가 커지므로, 막대는 레일 위를 지나 벽 쪽으로 미끄러져 내려간다. 마찰력은 이를 방해하므로 그림처럼 F는 벽을 따라 위쪽으로, T는 막대를 따라 위쪽(B 쪽)으로 작용한다. 두 접촉점 모두에서 극한 평형(limiting equilibrium) 상태이므로

$$F = \mu R, \qquad T = \lambda N.$$

힘의 분해

막대를 따라 위쪽을 향하는 단위벡터는 $(\sin\theta, \cos\theta)$이고, N의 방향은 $(-\cos\theta, \sin\theta)$(벽 쪽이면서 위쪽)이다. 수평 방향으로 분해하면

$$R - N\cos\theta + \lambda N\sin\theta = 0 \quad \Longrightarrow \quad R = N(\cos\theta - \lambda\sin\theta).$$

(벽이 막대를 밀어야 하므로 $R \geq 0$이어야 하고, 따라서 이 경우에는 $\tan\theta \leq 1/\lambda$가 필요하다.) 수직 방향으로 분해하면

$$\begin{aligned} W &= \mu R + N\sin\theta + \lambda N\cos\theta \\ &= N\big(\mu\cos\theta - \lambda\mu\sin\theta + \sin\theta + \lambda\cos\theta\big) \\ &= N\big((\lambda+\mu)\cos\theta + (1-\lambda\mu)\sin\theta\big). \end{aligned}$$

(1)의 N을 대입하고 $W\sin^2\theta$로 나누면

$$d\,\mathrm{cosec}^2\theta = a\big((\lambda+\mu)\cos\theta + (1-\lambda\mu)\sin\theta\big),$$

이것이 구하려던 결과이다.

$a\sin\theta > d$인 경우

이제 G는 레일 너머에 있다. 식 (1)과 기하적 상황은 그대로이므로, 남은 문제는 이번에도 미끄러지는 방향뿐이다.

> **생각해 보기** G가 레일 너머에 있게 되면 무엇이 달라지는가?

앞의 논증에서 $a\sin^3\theta < d$이면 아래쪽으로, $a\sin^3\theta > d$이면 위쪽으로 미끄러진다는 것을 보였다. $a\sin\theta < d$일 때는 앞의 경우만 가능했다. $a\sin\theta > d$이면 뒤의 경우가 가능해진다. 레일 너머로 튀어나온 부분의 무게 때문에 $N\sin\theta > W$가 되어, 막대는 레일 위를 지나 벽에서 **멀어지는** 쪽으로 미끄러져 내려가려 하고, A는 벽을 따라 올라간다. 이것이 새로운 경우이며, 여기서는 두 마찰력의 방향이 모두 반대가 된다. 즉 $F = \mu R$는 벽을 따라 아래쪽으로, $T = \lambda N$은 막대를 따라 아래쪽으로 작용한다. 위의 계산에서 λ를 $-\lambda$로, μ를 $-\mu$로 바꾸면

$$R = N(\cos\theta + \lambda\sin\theta), \qquad W = N\big((1-\lambda\mu)\sin\theta - (\lambda+\mu)\cos\theta\big),$$

이고, (1)과 함께 쓰면

$$d\,\mathrm{cosec}^2\theta = a\big((1-\lambda\mu)\sin\theta - (\lambda+\mu)\cos\theta\big).$$

이 경우에는 $R > 0$이 자동으로 성립한다. (만약 $a\sin^3\theta < d < a\sin\theta$이면 막대는 여전히 아래쪽으로 미끄러지기 직전이고, 첫 번째 결과가 그대로 적용된다. 그 유도 과정에서 G의 위치를 전혀 사용하지 않았기 때문이다.)

검산

- 마찰이 없으면($\lambda = \mu = 0$) 두 결과 모두 앞에서 구한 마찰 없는 평형 조건 $d = a\sin^3\theta$로 바뀐다.
- $\lambda = \tan\alpha$, $\mu = \tan\beta$(마찰각(angles of friction))로 놓으면 우변은 각각 $a\sin(\theta+\alpha+\beta)/(\cos\alpha\cos\beta)$와 $a\sin(\theta-\alpha-\beta)/(\cos\alpha\cos\beta)$가 된다. 두 경우는 마찰각의 부호만 다르며, 마땅히 그래야 한다.
- $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{1}{3}\pi$로 두면 두 경우에서 각각 $d/a = \frac{3}{8} + \frac{9\sqrt{3}}{32} \approx 0.862$와 $d/a = \frac{9\sqrt{3}}{32} - \frac{3}{8} \approx 0.112$를 얻는다. 각 값을 위의 마찰 방향과 함께 힘과 모멘트에 관한 식에 다시 대입하면 합력과 합 모멘트가 모두 0이 된다.

흔한 실수

- 레일에서의 수직항력을 연직 방향으로 잡는 것. 막대가 레일과 한 점에서만 닿으므로 수직항력은 막대에 수직이다.
- 모멘트 식에서 A에서 레일까지의 거리로 $d/\sin\theta$ 대신 길이 d를 쓰는 것.
- 막대가 실제로 어느 쪽으로 움직일지 따져 보지 않고 마찰력의 방향을 정해 버리는 것.

STEP 너머

막대는 아래쪽 극한 경우와 위쪽 극한 경우 사이의 각 θ 구간 전체에서 안정하다. 마찰은 평형 상태를 하나가 아니라 범위로 만들어 낸다. 이러한 집합(각 접촉점에서의 마찰 원뿔(friction cone)과 접촉이 유지할 수 있는 상태들의 집합)을 기술하는 것이 접촉 역학(contact mechanics)과 로봇공학에서 물체 파지(grasping) 분석의 출발점이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 대학 1학년 수준에서 마찰과 강체 정역학을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.