풀이

STEP I 2016, 문제 8

순수수학 • 생성함수

> **STEP I 2016, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q8

이 문제는 *Beyond STEP*의 9.4 절 **함수로서의 수열**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/generating-functions.html

핵심 아이디어

생성함수(generating function)는 수열 전체를 하나의 함수로 묶어 주며, 수열에 대한 연산은 그 함수에 대한 대수 계산이 된다. 소문항 (i)에서는 $1-x$의 음의 거듭제곱에 대한 이항급수(binomial series)가 원하는 계수를 만들어 내고, 이미 알고 있는 수열들로부터 n^2을 구성한다. 소문항 (ii)에서는 x^n을 곱하고 더하여 점화식(recurrence relation)을 f에 대한 방정식으로 바꾼다. 수열의 첨자를 한 칸 미는 것은 그 생성함수에 x를 곱하는 것과 같다.

풀이

소문항 (i)

지수가 -2인 이항급수에 의해

$$(1-x)^{-2} = \sum_{n\geq 0} \binom{-2}{n} (-x)^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n\geq 0} (n+1)x^n,$$

이다. 왜냐하면 $\binom{-2}{n}(-1)^n = \frac{2\cdot 3\cdots(n+1)}{n!} = n+1$이기 때문이다. x를 곱하면

$$x(1-x)^{-2} = \sum_{n\geq 0} (n+1)x^{n+1} = \sum_{n\geq 0} nx^n,$$

이 되는데, 합의 첨자를 다시 매기면 $n=0$인 항을 아무 문제 없이 포함할 수 있다(그 항은 0이다). 따라서 요구한 대로 $u_n = n$의 생성함수는 $x(1-x)^{-2}$이다.

마찬가지로 지수가 -3일 때

$$\binom{-3}{n}(-1)^n = \frac{3\cdot 4\cdots(n+2)}{n!} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

이므로

$$(1-x)^{-3} = \sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n.$$

이다. x를 곱하고 앞에서처럼 첨자를 다시 매기면

$$x(1-x)^{-3} = \sum_{n\geq 0}\frac{n(n+1)}{2}x^n,$$

이므로 수열은 $u_n = \frac{1}{2}n(n+1)$, 즉 $0,1,3,6,10,\ldots$이며, 이는 삼각수(triangular numbers)이다.

? **생각해 보기** 이제 알고 있는 두 수열로부터 어떻게 n^2을 얻을 수 있을까?

생성함수는 선형(linear)이다. 즉 u_n과 v_n의 생성함수가 각각 f와 g이면, $\alpha u_n + \beta v_n$의 생성함수는 $\alpha \mathrm{f} + \beta \mathrm{g}$이다.

$$n^2 = 2\cdot\tfrac{1}{2}n(n+1) - n,$$

이므로 $u_n = n^2$의 생성함수는

$$\frac{2x}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2x - x(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

이다.

소문항 (ii)(a)

각 $n \geq 1$에 대하여 $u_n x^n = k u_{n-1} x^n$이다. 모든 $n \geq 1$에 대하여 더하면

$$\sum_{n\geq 1} u_n x^n = kx \sum_{n\geq 1} u_{n-1}x^{n-1}$$
$$\mathrm{f}(x) - u_0 = kx\,\mathrm{f}(x),$$

이다. 왼쪽 합은 상수항이 빠진 $\mathrm{f}(x)$이고, 오른쪽 합은 $m = n-1$로 놓으면 $\sum_{m\geq 0} u_m x^m = \mathrm{f}(x)$이기 때문이다. $u_0 = a$이므로 요구한 대로 $\mathrm{f}(x) = a + kx\,\mathrm{f}(x)$이다. 따라서

$$\mathrm{f}(x) = \frac{a}{1-kx}.$$

이다. (검산으로 전개하면 $a + akx + ak^2x^2 + \cdots$이고, 실제로 $u_n = ak^n$이다.)

소문항 (ii)(b)

$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$에 x^n을 곱하고 $n \geq 2$에 대하여 더한다(점화식은 $n = 2$부터만 성립하므로 여기서부터 시작해야 한다).

$$\sum_{n\geq 2} u_n x^n = x \sum_{n\geq 2} u_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n\geq 2} u_{n-2} x^{n-2}.$$

생각해 보기 이 세 합 각각에서 f의 어떤 항이 빠져 있을까?

좌변에는 $u_0 + u_1 x$ 항이 빠져 있다. 우변의 첫 번째 합은 $u_1 x + u_2 x^2 + \cdots$에 걸쳐 있으므로 u_0만 빠져 있다. 두 번째 합은 $\mathrm{f}(x)$ 전체이다. 따라서

$$\mathrm{f}(x) - u_0 - u_1 x = x\big(\mathrm{f}(x) - u_0\big) + x^2\,\mathrm{f}(x).$$

이다. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$이면 이 식은 $\mathrm{f}(x) - x = x\,\mathrm{f}(x) + x^2\,\mathrm{f}(x)$가 되므로

$$\mathrm{f}(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

이다. 이것은 피보나치 수(Fibonacci numbers) $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$의 생성함수이다.

검산

- $x(1+x)(1-x)^{-3} = (x + x^2)(1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots)$를 전개하면 $x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \cdots$, 즉 제곱수가 마땅히 나온다.
- x를 $1 - x - x^2$로 나누는 다항식의 나눗셈(long division)을 하면 $x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \cdots$를 얻는다.
- $x = 0.1$일 때: 합 $\sum n^2 (0.1)^n$과 $0.11/0.9^3 = 0.150891\ldots$가 일치하고, 피보나치 수에 대한 $\sum u_n (0.1)^n$은 $0.1/0.89 = 10/89 = 0.112359\ldots$와 일치한다. 이 결과들은 문제에 나오는 모든 생성함수의 처음 30개 계수와 함께 컴퓨터로 확인하였다.

흔한 실수

- 음의 지수에 대한 이항계수를 잘못 구하는 것: $\binom{-r}{n}$에서 나오는 부호와 $(-x)^n$에서 나오는 부호는 서로 상쇄되므로, 모든 계수는 양수이다.
- (ii)(b)에서 점화식이 성립하지 않는 $n = 0$이나 $n = 1$부터 더하거나, 초기항 u_0과 $u_1 x$를 빼는 것을 잊는 것.
- 삼각수를 $\frac{1}{2}n(n-1)$로 쓰는 것: $u_1 = 1$인지 확인하라.

STEP 너머

$\phi, \psi = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$로 놓고 $1 - x - x^2 = (1 - \phi x)(1 - \psi x)$로 인수분해한 다음, 부분분수(partial fractions)와 소문항 (ii)(a)를 함께 이용하면 비네(Binet) 공식 $u_n = (\phi^n - \psi^n)/\sqrt{5}$를 얻는다. 같은 방법으로 상수 계수를 갖는 모든 선형 점화식을 풀 수 있으며, 생성함수는 조합론(combinatorics)과 확률론에서 핵심적인 도구이다(확률론에서는 확률생성함수(probability generating function)가 된다). Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 확률 쪽을 다루고, Wilf의 *generatingfunctionology*는 조합론 쪽을 다루는, 생동감 있고 무료로 구할 수 있는 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.