풀이

STEP I 2016, 문제 6

순수수학 • 벡터 기하

STEP I 2016, 6번 문제

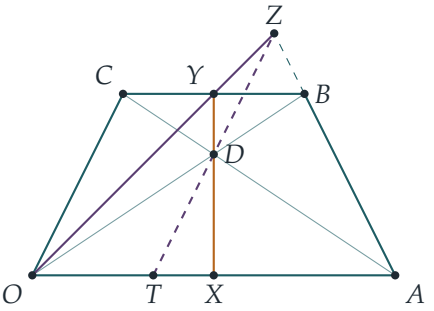
더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/16-s1-q6

핵심 아이디어

그림의 모든 점은 두 직선의 교점이므로, 각 직선을 벡터 형태로 나타내고 서로 같다고 놓는다. $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$는 평행(parallel)하지 않으므로 임의의 벡터는 $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ 꼴로 오직 한 가지 방법으로만 나타낼 수 있다. 따라서 같은 점에 대한 두 표현을 같다고 놓으면 $\mathbf{a}$의 계수와 $\mathbf{b}$의 계수를 따로따로 비교할 수 있다. 처음부터 끝까지 기저(basis) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$로 계산하면 모든 단계가 짧은 일차방정식 두 개로 정리된다.

풀이



c와 x의 꼴

CB가 OA와 평행하므로 벡터 $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$는 $\mathbf{a}$의 스칼라배(scalar multiple)이다. 이를 $\mathbf{c} - \mathbf{b} = k\mathbf{a}$라 하면 $\mathbf{c} = k\mathbf{a} + \mathbf{b}$이다. 사각형(quadrilateral)을 $O \to A \to B \to C$ 순서로 돌 때, 변 BC는 OA와 반대 방향이어야 하고(같은 방향이라면 변 AB와 CO가 서로 교차하여

$OABC$는 제대로 된 사각형이 아니다), 또 $C \neq B$이다. 따라서

$$k < 0.$$

음수라면 어떤 값이든 가능하며, $k = -1$이면 평행사변형(parallelogram)이다.

X는 OA 위에 있으므로 $\mathbf{x}$는 $\mathbf{a}$의 실수배이다. 이를 $\mathbf{x} = m\mathbf{a}$라 하면, X가 O와 A 사이에 (양 끝점을 제외하고) 있다는 것은

$$0 < m < 1.$$

을 뜻한다. 또한 O, A, B가 한 직선 위에 있지 않으므로(not collinear) $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$는 평행하지 않다.

점 Z

D 구하기. OB 위의 점은 $\lambda\mathbf{b}$이고, AC 위의 점은

$$\mathbf{a} + \mu(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (1 - \mu + \mu k)\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}.$$

이다. 계수를 비교하면 $\lambda = \mu$이고 $1 - \mu(1 - k) = 0$이다. $k < 0$이므로 $1 - k > 0$이고, 따라서 $\mu = \frac{1}{1-k}$이며

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{b}}{1-k}.$$

Y 구하기. BC 위의 점은 $\mathbf{b} + t\mathbf{a}$이다. XD 위의 점은

$$m\mathbf{a} + s(\mathbf{d} - m\mathbf{a}) = m(1-s)\mathbf{a} + \frac{s}{1-k}\mathbf{b}.$$

이다. $\mathbf{b}$의 계수를 비교하면 $s = 1 - k$이고, 이때 $\mathbf{a}$의 계수는 $m(1 - (1 - k)) = mk$이다. 따라서

$$\mathbf{y} = \mathbf{b} + mk\,\mathbf{a}.$$

Z 구하기. OY 위의 점은 $\rho(\mathbf{b} + mk\mathbf{a})$이고, AB 위의 점은 $\mathbf{a} + \sigma(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1 - \sigma)\mathbf{a} + \sigma\mathbf{b}$이다. 계수를 비교하면 $\rho = \sigma$이고 $\rho mk = 1 - \sigma$이므로 $\rho(mk + 1) = 1$이다. $mk + 1 \neq 0$이라면

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{b} + mk\,\mathbf{a}}{mk + 1},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. ($k < -1$일 때 일어날 수 있는 경우로 $mk = -1$이면 $\mathbf{y} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$이므로 OY가 AB와 평행하여 Z가 존재하지 않는다.)

? 생각해 보기 Z는 변 AB 자체 위에 있는가?

아니다. $-1 < mk < 0$이므로 $\sigma = \frac{1}{mk+1} > 1$이고, 따라서 그림에서처럼 Z는 AB를 B 너머로 연장한 직선 위에 있다. 문제는 직선에 관한 것이므로 이는 상관없다.

점 T와 두 관계식

DZ 위의 점은 $\mathbf{d}+\tau(\mathbf{z}-\mathbf{d})$이다. $(1-k)-(mk+1)=-k(1+m)$을 이용하면 $\mathbf{b}$의 계수는

$$\frac{1}{1-k}+\tau\left(\frac{1}{mk+1}-\frac{1}{1-k}\right)=\frac{1}{1-k}-\tau\,\frac{k(1+m)}{(mk+1)(1-k)},$$

이다. T가 OA 위에 있으려면 이 값이 0이어야 하므로 $\tau=\dfrac{mk+1}{k(1+m)}$이다($k\neq 0$임을 기억하자). 이때 $\mathbf{a}$의 계수는

$$\tau\cdot\frac{mk}{mk+1}=\frac{mk+1}{k(1+m)}\cdot\frac{mk}{mk+1}=\frac{m}{1+m}.$$

이다. 따라서

$$\mathbf{t}=\frac{m}{1+m}\,\mathbf{a}.$$

놀랍게도 k가 사라졌다. 즉 T는 오직 X의 위치에만 의존한다.

이제 $a=|\mathbf{a}|=OA$라 하자. $0<\frac{m}{1+m}<1$이므로 T는 O와 A 사이에 있고, 따라서

$$OT=\frac{ma}{1+m},\qquad TA=a-\frac{ma}{1+m}=\frac{a}{1+m},\qquad OX=ma.$$

그러므로

$$OT\times OA=\frac{ma^2}{1+m}=ma\times\frac{a}{1+m}=OX\times TA,$$

이고

$$\frac{1}{OX}+\frac{1}{OA}=\frac{1}{ma}+\frac{1}{a}=\frac{1+m}{ma}=\frac{1}{OT},$$

이다. 이 둘이 바로 증명해야 할 결과이다.

검산

그림의 사다리꼴(trapezium)로 확인해 보자. $\mathbf{a}=(4,0)$, $\mathbf{b}=(3,2)$, $k=-\frac{1}{2}$, $m=\frac{1}{2}$이다. 그러면 $D=(2,\frac{4}{3})$, $Y=(2,2)$, $Z=(\frac{8}{3},\frac{8}{3})$, $T=(\frac{4}{3},0)$이고, T, D, Z가 한 직선 위에 있음과 $\frac{1}{OT}=\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{OX}+\frac{1}{OA}$임을 확인할 수 있다. 무작위로 만든 사다리꼴 20,000개에 대해 컴퓨터로 검산한 결과, 위의 모든 식이 10^{-10} 이내의 오차로 일치했다. 극한의 경우인 $m\to 1$ ($X\to A$)에서는 $OT=\frac{1}{2}OA$가 되어 $\frac{1}{OT}=\frac{2}{OA}$와 들어맞는다.

흔한 실수

- $k>0$으로 잡는 것: $\mathbf{c}=\mathbf{b}+k\mathbf{a}$에서 $k>0$이면 그 "사각형"은 스스로 교차한다.
- 계수를 비교하면서 그것이 왜 허용되는지 말하지 않는 것: 계수 비교는 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 평행하지 않다는 사실에 기대고 있다.

- 서로 다른 두 직선에 같은 매개변수(parameter) 문자를 쓰는 것: 이렇게 하면 있지도 않은 일치를 억지로 만들어 내게 된다.

STEP 너머

T가 k에(그리고 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$ 사이의 각에도) 의존하지 않는다는 사실은, 이것이 실은 아핀 기하(affine geometry), 나아가 사영 기하(projective geometry)의 정리임을 보여 준다. 즉 점과 직선의 결합 관계와 한 직선 위에서의 비만이 중요하다. 관계식 $\frac{1}{OT} = \frac{1}{OX} + \frac{1}{OA}$는 복비(cross-ratio)와 조화점렬(harmonic range)로 우아하게 다룰 수 있는 종류의 명제이며, 같은 작도를 반복하면 점들이 $\frac{m}{1+2m}\mathbf{a}$, $\frac{m}{1+3m}\mathbf{a}$, $\cdots$에 놓인다. 더 알고 싶다면 콕서터(Coxeter)와 Greitzer의 *Geometry Revisited*(기하학 다시 보기), 또는 콕서터의 *Projective Geometry*(사영 기하학)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.