풀이

STEP I 2016, 문제 5

순수수학 • 서로 접하는 원

STEP I 2016, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/16-s1-q5

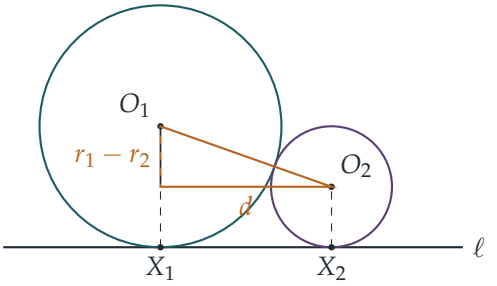
핵심 아이디어

모든 것은 한 가지 사실에 달려 있다. 두 원이 서로 접하고 둘 다 같은 직선에 접하면, 두 원과 직선의 접점(point of contact) 사이의 거리는 $2\sqrt{r_1 r_2}$이다. 이것은 직각삼각형 하나에서 바로 나온다. 그다음 치환(substitution) $x = 1/\sqrt{a}, y = 1/\sqrt{b}, z = 1/\sqrt{c}$를 하면 $(**)$는 대칭(symmetric) 사차식(quartic)이 되고, 이 사차식은 네 개의 일차 인수(linear factor)로 인수분해(factorise)되는데, 그 인수 중 하나가 바로 $(*)$이다.

풀이

소문항 (i)

한 직선 위에서 서로 접하는 두 원. 반지름이 r_1과 r_2인 두 원이 서로 외접(touching externally)하고, 둘 다 직선 ℓ의 같은 쪽에 있으면서 각각 점 X_1과 X_2에서 그 직선에 접한다고 하자. X_1과 X_2로 그은 반지름은 ℓ에 수직이므로, 중심 O_1, O_2는 ℓ로부터 각각 높이 r_1과 r_2에 있다. 두 원이 외접하므로 $O_1O_2 = r_1 + r_2$이다.



O_2에서 반지름 O_1X_1에 수선(perpendicular)을 내린다(그림은 $r_1 \geq r_2$인 경우이다). 그러면 빗변(hypotenuse)이 $r_1 + r_2$, 세로 변이 $|r_1 - r_2|$, 가로 변이 $d = X_1X_2$인 직각삼각형이 생긴다. 피타고라스(Pythagoras)의 정리에 의해

$$d^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2, \qquad \text{따라서} \qquad X_1X_2 = 2\sqrt{r_1r_2}.$$

세 번 적용하기. 그림에서 세 원은 두 개씩 서로 접하고, 셋 모두 직선에 점 P, Q, R에서 접하며, Q는 P와 R 사이에 있다. 따라서

$$PQ = 2\sqrt{ab}, \qquad QR = 2\sqrt{bc}, \qquad PR = 2\sqrt{ac},$$

이고, $PQ + QR = PR$로부터 $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} = \sqrt{ac}$를 얻는다. 양변을 $\sqrt{abc} > 0$으로 나누면

$$\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}},$$

이고, 이것이 $(*)$이다.

$(**)$ **유도하기.** $x = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{b}}$, $z = \dfrac{1}{\sqrt{c}}$로 놓으면 $\dfrac{1}{a} = x^2$ 등이 성립하고, $(*)$는 $y = x + z$라는 뜻이 된다. 그러면 $(**)$는 $2(x^4 + y^4 + z^4) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$이 된다. 우변을 전개하고 정리하면, 이는 다음과 동치이다.

$$F := x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = 0.$$

? **생각해 보기** 이 사차식을 어떻게 인수분해할 수 있을까?

제곱의 차(difference of two squares) 꼴로 묶는다. $(x^2 + y^2 - z^2)^2 = x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2$이므로

$$\begin{aligned} F &= (x^2 + y^2 - z^2)^2 - (2xy)^2 \\ &= (x^2 - 2xy + y^2 - z^2)(x^2 + 2xy + y^2 - z^2) \\ &= ((x - y)^2 - z^2)((x + y)^2 - z^2) \\ &= (x - y - z)(x - y + z)(x + y - z)(x + y + z). \end{aligned}$$

$(*)$에 의해 $x - y + z = 0$이므로 $F = 0$이고, 따라서 $(**)$가 성립한다.

소문항 (ii)

이제 a, b, c는 $b < c < a$를 만족하고 $(**)$를 만족하는 임의의 양수이다. x, y, z를 앞에서와 같이 정의하면 이들은 양수이고, $t \mapsto 1/\sqrt{t}$가 $t > 0$에서 감소함수(decreasing function)이므로 조건 $b < c < a$로부터

$$y > z > x > 0.$$

소문항 (i)에서 보였듯이 $(**)$는

$$(x-y-z)(x-y+z)(x+y-z)(x+y+z)=0,$$

과 동치이므로, 네 인수 중 하나는 0이다. 그런데 그중 세 개는 0이 될 수 없다.

- 세 수가 모두 양수이므로 $x+y+z>0$이다.
- $y>z$이고 $x>0$이므로 $x+y-z>0$이다.
- $x<y$이고 $z>0$이므로 $x-y-z<0$이다.

따라서 $x-y+z=0$, 즉 $y=x+z$이고, 이는

$$\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{c}},$$

곧 $(*)$이다. (실제로 필요했던 것은 b가 셋 중 가장 작다는 사실뿐이다.)

검산

- $a=4$, $c=1$로 놓자. 그러면 $(*)$로부터 $1/\sqrt{b}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$이므로 $b=\frac{4}{9}$이다. 이때 $2\left(\frac{1}{16}+\frac{81}{16}+1\right)=\frac{49}{4}$이고 $\left(\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+1\right)^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$이므로, $(**)$가 요구하는 대로 성립한다.
- (ii)에서 왜 크기 순서가 필요할까? $a=4$, $c=1$일 때 관계식 $(**)$는 $1/b$에 대한 이차방정식이고, 두 근 $b=\frac{4}{9}$와 $b=4$를 가진다($1/\sqrt{b}=|x-z|=\frac{1}{2}$에서 나온다). 두 번째 근에서는 b가 가장 작은 것이 아니라 가장 크며, 이 경우 $(**)$는 만족하지만 $(*)$는 만족하지 않는다. 이때 $1/\sqrt{c}=1/\sqrt{a}+1/\sqrt{b}$를 통해 묶이는 것은 a와 b이다. 문자의 역할을 바꾸는 것은 어느 원이 가운데에 놓이는지를 바꾸는 것에 해당한다.
- 한 직선 위에서 서로 접하는 세 원의 무작위 배치 수천 개에 대해 컴퓨터로 확인한 결과, $(*)$와 $(**)$가 모두 성립함을 확인하였다.

흔한 실수

- 두 중심 사이의 거리 r_1+r_2를 두 접점 사이의 거리로 착각하는 것. 두 중심은 높이가 서로 다르다.
- 소문항 (ii)에서 나머지 세 인수를 배제하지 않고 인수분해로부터 바로 $(*)$를 결론짓는 것. 바로 이 부분에서 $b<c<a$가 쓰인다.

STEP 너머

관계식 $(**)$는 데카르트 원 정리(Descartes' circle theorem)의 퇴화된 경우(degenerate case)이다. 서로 접하는 네 원의 곡률(curvature)을 $k_i = 1/r_i$라 하면 $2\sum k_i^2 = \left(\sum k_i\right)^2$이 성립하고, 직선은 곡률이 0인 원으로 간주한다. 틈마다 새로운 원을 계속 끼워 넣으면 아폴로니우스 개스킷(Apollonian gasket)이 만들어지는데, 곡률이 정수인 경우 놀라운 정수론(number theory)으로 이어진다. F의 인수분해는 헤론의 공식(Heron's formula)의 배후에 있는 인수분해이기도 하다. x, y, z를 삼각형의 세 변이라 하면 $16\Delta^2 = -F$이다. 이 결과들을 명쾌하게 보여 주는 원의 기하와 반전(inversion)에 대해 더 알고 싶다면 Needham, *Visual Complex Analysis*를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.