풀이

STEP I 2016, 문제 4

순수수학 • 곡선의 곡률

> **STEP I 2016, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q4

핵심 아이디어

κ의 식은 어려운 2계 미분방정식(second-order differential equation)처럼 보이지만, 소문항 (i)은 그것이 완전 도함수(exact derivative)임을 보여 주려고 있는 것이다. $p = \mathrm{f}'(x)$로 놓으면 곡률(curvature)은 $p/\sqrt{1+p^2}$의 x에 대한 도함수이므로, 곡률이 상수이면 한 번의 적분은 보자마자 할 수 있다. 그다음 두 번째 적분은 일상적인 계산이며, 답은 익숙한 모양으로 드러난다.

풀이

소문항 (i)

$z(1+z^2)^{-1/2}$에 곱의 미분법(product rule)을 쓰면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{(1+z^2)^{1/2}}\right) &= (1+z^2)^{-1/2} - z\cdot z(1+z^2)^{-3/2} \\ &= \frac{(1+z^2)-z^2}{(1+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+z^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

소문항 (ii)

κ를 0이 아닌 상수라 하고 $p = \mathrm{f}'(x)$로 놓으면 $\mathrm{f}''(x) = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$이다. 소문항 (i)과 연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = \frac{1}{(1+p^2)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{f}''(x)}{(1+(\mathrm{f}'(x))^2)^{3/2}} = \kappa.$$

x에 대해 적분하면, 어떤 상수(이를 $-\kappa a$로 쓴다. $\kappa \neq 0$이므로 이렇게 쓸 수 있다)가 존재하여 다음이 성립한다.

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \kappa(x-a). \qquad (*)$$

생각해 보기 부호를 놓치지 않으면서 $(*)$를 p에 대해 어떻게 풀 수 있을까?

제곱할 때 무엇을 버리게 되는지 기억한다면 제곱해도 안전하다. $\sqrt{1+p^2} > 0$이므로 $(*)$는 p의 부호가 $\kappa(x-a)$의 부호와 같다는 것을 말해 주며, $|p| < \sqrt{1+p^2}$이므로 $|\kappa(x-a)| < 1$이라는 것도 말해 준다. 제곱하면 $p^2 = \kappa^2(x-a)^2(1+p^2)$이므로

$$p^2 = \frac{\kappa^2(x-a)^2}{1-\kappa^2(x-a)^2}, \qquad \text{그리고 위와 같이 부호를 고르면,} \qquad p = \frac{\kappa(x-a)}{\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2}}.$$

역으로, $1+p^2 = 1/(1-\kappa^2(x-a)^2)$이므로 이 p는 실제로 $(*)$를 만족한다.

이제 다시 적분한다. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2} = \dfrac{-\kappa^2(x-a)}{\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2}}$이므로, 어떤 상수 b에 대해 다음을 얻는다.

$$y = b - \frac{1}{\kappa}\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2}, \qquad |x-a| < \frac{1}{|\kappa|}.$$

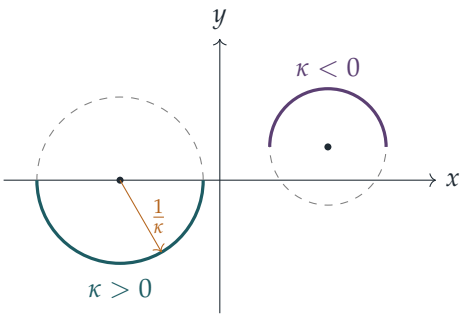
식을 정리하면 $\kappa(y-b) = -\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2}$이고, 양변을 제곱하면

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{1}{\kappa^2}.$$

따라서 0이 아닌 일정한 부호 있는 곡률(signed curvature) κ를 갖는 곡선은 모두 반지름이 $1/|\kappa|$이고 중심이 (a,b)인 원의 일부이며, 그러한 호는 모두 실제로 나타난다. 과정을 거꾸로 따라가면 위의 각 함수는 부호 있는 곡률이 정확히 κ이기 때문이다. 더 정확히 말하면 $\kappa(y-b) \leq 0$이므로 다음과 같다.

- $\kappa > 0$이면 곡선은 아래쪽 반원 $y = b - \sqrt{\kappa^{-2} - (x-a)^2}$이며, 중심보다 아래에 놓이고 위쪽으로 휘어 있다($\mathrm{f}'' > 0$).
- $\kappa < 0$이면 곡선은 위쪽 반원 $y = b + \sqrt{\kappa^{-2} - (x-a)^2}$이며, 중심보다 위에 놓이고 아래쪽으로 휘어 있다($\mathrm{f}'' < 0$).

끝점 $x = a \pm 1/|\kappa|$는 제외된다. 그곳에서는 기울기가 무한대이기 때문이다. 곡선 $y = \mathrm{f}(x)$는 그래프일 수밖에 없으므로 열린 반원(또는 그 일부)보다 더 클 수는 없다.



기하학적 의미

이 곡선들에 대해 $|\kappa|$는 원의 반지름의 역수이므로, $|\kappa|$가 클수록 더 작고 더 급하게 휘는 원이 된다. κ의 부호는 곡선이 어느 쪽으로 휘는지를 나타낸다. 원의 중심이 곡선보다 위에 있으면(곡선이 아래로 볼록(concave up)) $\kappa > 0$이고, 중심이 곡선보다 아래에 있으면 $\kappa < 0$이다.

검산

- $\kappa = \frac{1}{2}, a = b = 0$으로 놓자. 곡선은 $y = -\sqrt{4 - x^2}$, 즉 반지름이 2인 원의 아래쪽 반이다. $x = 1$에서 $y = -\sqrt{3}, y' = x/\sqrt{4 - x^2} = 1/\sqrt{3}, y'' = 4/(4 - x^2)^{3/2} = 4/3^{3/2}$이므로 $1 + y'^2 = \frac{4}{3}$이고 $\kappa = \dfrac{4/3^{3/2}}{(4/3)^{3/2}} = \frac{1}{2}$로, 예상한 대로이다.
- 직선은 $f'' = 0$이므로 $\kappa = 0$이다. 이는 반지름 $1/|\kappa| \to \infty$일 때 원의 극한이며, 문제에서 $\kappa = 0$을 제외하는 이유이기도 하다.
- 임의의 초깃값에서 시작하여 $f'' = \kappa(1 + f'^2)^{3/2}$를 컴퓨터로 단계별로 풀어 보았더니, 점들은 소수점 아래 여섯째 자리까지 예측한 원 위에 머물렀다.

흔한 실수

- 첫 단계에서 적분상수(constant of integration)를 빠뜨리는 것. 그러면 중심을 수평 방향으로 옮길 자유를 잃게 된다.
- p에 대해 잘못된 제곱근을 택하는 것. 그러면 중심의 반대쪽에 있는 반원이 나오고 κ의 부호도 틀리게 된다.
- "κ는 반지름이다"라고만 말하는 것. 그것은 반지름의 역수이며, 휘는 방향을 나타내는 부호가 붙어 있다.

STEP 너머

곡률은 곡선의 미분기하학(differential geometry)의 출발점이다. 호의 길이(arc length) s로 매개화된 곡선에 대해 $\kappa = \mathrm{d}\psi/\mathrm{d}s$이며, 여기서 ψ는 접선이 x축과 이루는 각이다. 이 문제에서는 $p/\sqrt{1+p^2} = \sin\psi$이므로, $(*)$는 사실 곡선을 따라 ψ가 일정한 비율로 변한다는 명제이다. 3차원에서는 곡률에 비틀림률(torsion)이 더해지며, 프레네–세레(Frenet–Serret) 공식은 이 두 함수가 강체 운동(rigid motion)을 제외하고 곡선을 결정한다는 것을 보여 준다. Pressley의 *Elementary Differential Geometry*(초등 미분기하학)는 대학 1학년 수준의 친절한 입문서이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.