풀이

STEP I 2016, 문제 12

확률과 통계 • 이항계수의 대칭성

> **STEP I 2016, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q12

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.6 절 **동전 하나 더**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/one-more-coin.html

핵심 아이디어

소문항 (i)과 (ii)는 이항 확률(binomial probability)을 직접 계산하는 문제이며, 두 소문항 모두 놀라울 만큼 간단한 같은 답을 준다. 소문항 (iii)은 그 이유를 설명한다. Bob의 던지기를 처음 n번과 추가로 던지는 한 번으로 나누어 보자. 처음 n번의 던지기에서 Bob과 Alice는 대등한 조건에 있으므로 대칭성(symmetry)이 문제를 해결해 주고, 추가로 던지는 한 번은 동점을 공평하게 가른다.

풀이

이 풀이 전체에서 A를 Alice가 얻은 앞면의 개수, B를 Bob이 얻은 앞면의 개수라 하자. 공정한 동전을 m번 던질 때 앞면의 개수 X는

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{m}{k}\frac{1}{2^m}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m,$$

을 만족하고, Alice의 던지기와 Bob의 던지기는 서로 독립(independent)이므로 A와 B에 대한 확률을 곱할 수 있다.

소문항 (i)

Alice는 두 번, Bob은 세 번 던지므로

k	0	1	2	3
$\mathrm{P}(A=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	
$\mathrm{P}(B=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

이다. Alice의 점수를 조건으로 놓자(conditioning). $A=a$일 때 $B>a$이어야 하므로, 꼬리 확률(tail probability) $\mathrm{P}(B>0)=\frac{7}{8}, \mathrm{P}(B>1)=\frac{1}{2}, \mathrm{P}(B>2)=\frac{1}{8}$이 필요하다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B>A) &= \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{7}{8}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{8}\\ &= \frac{7+8+1}{32}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

소문항 (ii)

이제 $a=0,1,2,3$에 대하여 $\mathrm{P}(A=a)=\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{8}$이고, $k=0,\dots,4$에 대하여 $\mathrm{P}(B=k)=\frac{1}{16},\frac{4}{16},\frac{6}{16},\frac{4}{16},\frac{1}{16}$이다. 꼬리 확률은

$$\mathrm{P}(B>0)=\tfrac{15}{16},\quad \mathrm{P}(B>1)=\tfrac{11}{16},\quad \mathrm{P}(B>2)=\tfrac{5}{16},\quad \mathrm{P}(B>3)=\tfrac{1}{16}.$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B>A) &= \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{15}{16}+\tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{11}{16}+\tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{5}{16}+\tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{16}\\ &= \frac{15+33+15+1}{128}=\frac{64}{128}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

이번에도 답은 정확히 $\frac{1}{2}$이다.

소문항 (iii)

먼저 두 사람이 같은 횟수만큼 던지는 게임에 관한 사실 하나를 살펴보자. Alice와 Bob이 각각 n번씩 던질 때, "Bob이 더 많다", "같다", "Alice가 더 많다" 중 정확히 하나가 일어난다. 두 사람은 똑같은 실험을 하므로 상황은 두 사람 사이에서 대칭이고, 따라서 "Alice가 더 많다"의 확률도 p_2이다. 그러므로

$$2p_2+p_1=1. \qquad (*)$$

이제 Alice가 n번, Bob이 $n+1$번 던진다고 하자. B'을 Bob의 **처음** n번 던지기에서 나온 앞면의 개수라 하고, H를 Bob의 마지막 던지기가 앞면인 사건이라 하자. 그러면 H가 일어나면 $B=B'+1$이고, 그렇지 않으면 $B=B'$이다.

? **생각해 보기** B와 A의 비교는 B'과 A의 비교에 어떻게 의존하는가?

B'과 A는 정수이고 B는 B' 또는 $B'+1$이므로

- $B'>A$이면 마지막 던지기와 관계없이 반드시 $B>A$이다.

- $B' = A$이면 마지막 던지기가 앞면일 때, 그리고 그때에만 $B > A$이다.
- $B' < A$이면 $B' \leq A - 1$이므로 $B \leq A$이고, Bob은 이기지 못한다.

Bob의 처음 n번 던지기와 Alice의 n번 던지기를 비교하는 것은 바로 같은 횟수 게임이므로 $\mathrm{P}(B' > A) = p_2$이고 $\mathrm{P}(B' = A) = p_1$이다. 마지막 던지기는 나머지 모든 것과 독립이고 $\mathrm{P}(H) = \frac{1}{2}$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{Bob이 Alice보다 앞면을 더 많이 얻는다}) = p_2 + \tfrac{1}{2}p_1.$$

$(*)$에 의하여 $p_2 + \frac{1}{2}p_1 = \frac{1}{2}(2p_2 + p_1) = \frac{1}{2}$이다.

이것이 일반화(generalisation)이다. *Alice*가 공정한 동전을 n번 던지고 *Bob*이 공정한 동전을 $n+1$번 던지면, 모든 $n \geq 0$에 대하여 *Bob*이 *Alice*보다 앞면을 더 많이 얻을 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 소문항 (i)과 (ii)는 각각 $n = 2$와 $n = 3$인 경우이다.

검산

- $n = 0$: Alice는 한 번도 던지지 않고 Bob은 한 번 던진다. Bob은 앞면이 나올 때, 그리고 그때에만 이기며, 그 확률은 $\frac{1}{2}$이다.
- $n = 2$: 직접 계산하면 $p_1 = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$이고, $(*)$로부터 $p_2 = \frac{5}{16}$이다. 그러면 $p_2 + \frac{1}{2}p_1 = \frac{5}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$로 소문항 (i)의 결과와 일치한다.
- 컴퓨터로 정확히 열거해 보면 29 이하의 모든 n에 대하여 $\mathrm{P}(B > A) = \frac{1}{2}$임을 확인할 수 있고, 소문항 (ii)를 200 000회 시행으로 모의실험(simulation)한 결과는 0.4997이었다.

흔한 실수

- 같은 횟수 게임에서 $p_2 = \frac{1}{2}$라고 가정하는 것. 동점이 될 확률이 양수이므로 $p_2 = \frac{1}{2}(1 - p_1) < \frac{1}{2}$이다.
- 소문항 (iii)에서 $B' = A$인 경우를 빠뜨리거나, 추가 던지기에 대한 인수 $\frac{1}{2}$를 곱하지 않고 그 경우를 통째로 세는 것.
- $\mathrm{P}(B > a)$ 대신 꼬리 확률 $\mathrm{P}(B \geq a)$를 사용하는 것.

STEP 너머

이 깔끔한 답은 대칭성 논법에 추가된 한 단계에 대한 조건부 계산을 더한 데서 나온다. 이러한 방식은 무작위 행보(random walk)에서 투표 문제(ballot problem)에 이르기까지 확률론 전반에 걸쳐 나타난다. 더 매끄러운 풀이도 있다. Bob은 한 번 더 던지므로, Bob이

Alice보다 앞면을 더 많이 얻지 **못하는** 것은 Bob이 Alice보다 뒷면을 더 많이 얻는 것과 정확히 같다. 앞면과 뒷면을 맞바꾸어 보면 "앞면이 더 많다"와 "뒷면이 더 많다"의 확률이 같음을 알 수 있고, 두 사건은 서로 여사건이므로 각각의 확률은 $\frac{1}{2}$이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 이러한 조건부 확률과 대칭성 기법을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.