풀이

STEP I 2016, 문제 11

역학 • 포물체의 최대 도달 거리

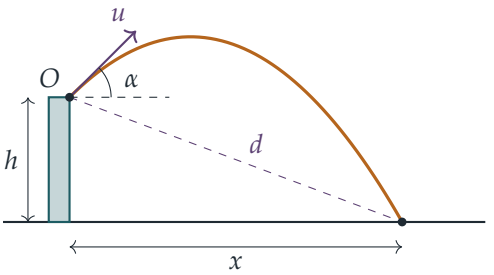
> **STEP I 2016, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q11

핵심 아이디어

수평 방향과 연직 방향의 운동을 식으로 쓰고, 시간을 소거한 다음 $\sin\alpha$와 $\cos\alpha$의 제곱을 배각(double angle)으로 바꾼다. 최대 도달 거리를 구할 때에는 착지 방정식이 x를 α의 함수로 음함수(implicit function)처럼 정의한다고 보고 이를 미분한다. 최댓값에서 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\alpha = 0$이고, 나머지는 미지수 $\cos 2\alpha$ 하나에 대한 삼각함수 계산이다.

풀이

P를 공기 저항 없이 중력만 받아 움직이는 입자로, 평지를 수평면으로 모형화한다. 탑의 밑부분을 원점으로 하고, 발사 방향의 수평축을 x, 연직 위쪽을 y로 잡는 좌표축을 사용하면 O는 점 $(0, h)$이다.



착지 방정식

발사하고 시간 t가 지났을 때,

$$X = ut\cos\alpha, \qquad Y = h + ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

탑은 똑바로 서 있고 P는 어떤 거리 $x > 0$인 곳에 떨어지므로 $\cos\alpha \neq 0$이며, $Y = 0$이 되는 착지 순간에 $t = \dfrac{x}{u\cos\alpha}$이다. 따라서

$$0 = h + x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}.$$

양변에 $2\cos^2\alpha$를 곱하고 $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$와 $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$를 이용하면

$$\frac{gx^2}{u^2} = 2h\cos^2\alpha + 2x\sin\alpha\cos\alpha = h(1+\cos 2\alpha) + x\sin 2\alpha,$$

이고, 이것이 구하는 방정식이다.

최대 수평 거리

각 α는 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$의 범위에서 움직일 수 있다(아래쪽으로 쏘는 것도 허용한다). 이러한 각 α마다 착지 거리 x는 α에 대해 매끄럽게 변하는 양의 함수이고, $\alpha \to \pm\frac{\pi}{2}$일 때 $x \to 0$이다. 비행 시간은 유계로 남아 있는 반면 수평 속력 $u\cos\alpha$는 0으로 가기 때문이다. 그러므로 x는 구간 내부의 어떤 α에서 최댓값을 가지며, 그곳에서 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\alpha = 0$이다.

$x' = \mathrm{d}x/\mathrm{d}\alpha$로 쓰고 착지 방정식을 α에 대해 미분하면

$$\frac{2gx}{u^2}\,x' = -2h\sin 2\alpha + x'\sin 2\alpha + 2x\cos 2\alpha.$$

$x' = 0$으로 놓으면

$$x\cos 2\alpha = h\sin 2\alpha.$$

여기서 $\cos 2\alpha \neq 0$이다. 그렇지 않으면 $h > 0$이므로 $h\sin 2\alpha = 0$에서 $\sin 2\alpha = 0$이어야 하는데, 이는 불가능하다. 따라서 최댓값에서

$$x = h\tan 2\alpha,$$

이고, 이것이 보이려던 것이다.

> **생각해 보기** 이제 x와 α에 대한 방정식이 두 개 있다. x를 어떻게 깔끔하게 소거할까?

$x = h\tan 2\alpha$를 착지 방정식에 대입하고 $c = \cos 2\alpha$, $s = \sin 2\alpha$로 쓴다. 우변은

$$h(1+c) + h\frac{s^2}{c} = \frac{h\,(c + c^2 + s^2)}{c} = \frac{h(1+c)}{c},$$

가 되고, 좌변은

$$\frac{gh^2}{u^2}\cdot\frac{s^2}{c^2} = \frac{gh^2(1-c)(1+c)}{u^2c^2}.$$

이다. 두 식을 같게 놓고 $h(1+c)/c$로 나눈다. $c \neq -1$이므로 이 값은 0이 아니다($c \neq 0$임은 이미 보였고, $c = -1$이면 $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$가 된다).

$$\frac{gh(1-c)}{u^2c} = 1 \quad\Longrightarrow\quad gh - ghc = u^2c \quad\Longrightarrow\quad \cos 2\alpha = \frac{gh}{u^2+gh}.$$

정상점(stationary point)에서 가능한 값은 이것뿐이고, $\tan 2\alpha = x/h > 0$이므로 $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$로 정해진다. 따라서 정상점은 정확히 하나이며 그것이 최댓값이다. (참고로 $\tan 2\alpha = \dfrac{u\sqrt{u^2+2gh}}{gh}$이므로 최대 거리는 $x = \dfrac{u\sqrt{u^2+2gh}}{g}$이다.)

O로부터의 최대 거리

착지점은 $(x, 0)$이므로 $O = (0, h)$로부터의 거리는

$$d = \sqrt{x^2 + h^2}.$$

이다. h가 고정되어 있으면 d는 x에 대해 증가하므로, d가 최대인 것은 정확히 x가 최대일 때이다. 그때 $x = h\tan 2\alpha$이므로

$$d = \sqrt{h^2\tan^2 2\alpha + h^2} = h\sec 2\alpha = h \cdot \frac{u^2+gh}{gh} = \frac{u^2}{g} + h,$$

이다. 여기서 $\sec 2\alpha > 0$을 이용했다. 이것이 구하는 최대 거리이다.

검산

- $h = 0$이면 $\cos 2\alpha = 0$이므로 $\alpha = 45°$이고, 최대 도달 거리는 u^2/g이다. 평지에서의 익숙한 결과이다.
- $u = 10, g = 10, h = 5$(SI 단위)로 두자. 그러면 $\cos 2\alpha = \frac{50}{150} = \frac{1}{3}$이고, 최대 도달 거리는 $\sqrt{100\cdot 200}/10 = 10\sqrt{2} \approx 14.14$이며, $d = \sqrt{200+25} = 15 = \frac{100}{10} + 5$로 예측과 일치한다. 컴퓨터로 α를 탐색해 보면 14.14가 가장 큰 착지 거리임을 확인할 수 있다.
- h가 커지면 $\cos 2\alpha \to 1$이므로 최적의 각은 0으로 간다. 아주 높은 탑에서는 거의 수평으로 쏘아야 한다.

흔한 실수

- $x = h\tan 2\alpha$를 써 놓고, 이 식이 모든 α가 아니라 최댓값에서만 성립한다는 사실을 잊는 것.
- $1 + \cos 2\alpha$나 $\cos 2\alpha$로 나누면서 이 값들이 왜 0이 아닌지 밝히지 않는 것.
- $d^2 = x^2 + h^2$가 x와 같은 각에서 최대가 된다는 점을 알아채지 못하고 d를 따로 최대화하는 것.

STEP 너머

답 $d = u^2/g + h$에는 멋진 기하학적 설명이 있다. O에서 속력 u로 쏜 모든 궤적은 하나의 **포락선**(*envelope*), 곧 "안전 포물선(parabola of safety)"에 접한다. 이 포물선은 초점이 O이고 준선이 O보다 높이 u^2/g만큼 위에 있다. 가장 먼 착지점은 이 포락선 위에 있으므로, 초점–준선 성질에 의해 그 점에서 O까지의 거리는 그 점에서 준선까지 내려온 거리, 즉 $u^2/g + h$와 같다. 곡선족의 포락선은 대학 1학년 미적분학과 역학의 표준 주제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이런 식으로 세심하게 다룬 포물체 문제를 공부하기에 좋은 다음 단계이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.