풀이

STEP I 2016, 문제 10

역학 • 충돌과 반발계수

> **STEP I 2016, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q10

핵심 아이디어

충돌은 세 번 일어나며, 각 충돌은 똑같은 두 방정식, 즉 운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)으로 다룬다. 처음 두 충돌은 동시에 일어나지만 서로 독립적이므로, 따로따로 계산하여 B와 C가 만나기 직전의 속도를 구할 수 있다. 그러면 B가 결국 정지한다는 조건에서 λ와 e를 잇는 방정식 하나를 얻는다.

풀이

네 물체를 매끄러운 탁자 위의 입자로 모형화한다. 따라서 충돌할 때를 제외하면 수평 방향의 힘은 작용하지 않으며, 모든 충돌은 정면충돌(direct collision, 한 직선을 따라 일어나는 충돌)이다. A에서 D를 향하는 방향을 양의 방향으로 잡으면, A의 처음 속도는 u이고 D의 처음 속도는 $-u$이다.



소문항 (i)

A가 B와 충돌한다. 충돌 후 A와 B의 속도를 각각 v_A와 v_B라 하자. 그러면

$$\begin{aligned} \text{운동량:} \quad & \lambda m u = \lambda m v_A + m v_B, \\ \text{반발:} \quad & v_B - v_A = eu. \end{aligned}$$

$v_B = v_A + eu$를 첫 번째 방정식에 대입하면 $(\lambda+1)v_A = (\lambda - e)u$를 얻으므로

$$v_A = \frac{(\lambda - e)u}{\lambda + 1}, \qquad v_B = v_A + eu = \frac{\lambda(1+e)u}{\lambda+1}.$$

D가 C와 충돌한다. 충돌 후 C와 D의 속도를 각각 v_C와 v_D라 하자. 그러면

$$\text{운동량:} \quad -mu = mv_C + mv_D,$$
$$\text{반발:} \quad v_D - v_C = e(0 - (-u)) = eu.$$

(충돌 전에 C와 D는 속력 u로 가까워진다. 충돌 후에는 D가 C의 오른쪽에 있으므로, 둘은 $v_D - v_C$의 비율로 멀어진다.) 이 두 방정식을 풀면

$$v_C = -\tfrac{1}{2}(1+e)u, \qquad v_D = -\tfrac{1}{2}(1-e)u.$$

따라서 C는 속력 $\frac{1}{2}(1+e)u$로 B를 향해 움직이고, D는 그보다 작은 속력 $\frac{1}{2}(1-e)u$로 그 뒤를 따라 왼쪽으로 움직인다.

B가 C와 충돌한다. 이제 B는 v_B로 오른쪽으로, C는 왼쪽으로 움직이므로, 둘은 속력 $v_B - v_C$로 가까워진다. 충돌 후 B는 정지해 있다. C의 속도를 w라 하자. 그러면

$$\text{운동량:} \quad mv_B + mv_C = 0 + mw,$$
$$\text{반발:} \quad w - 0 = e(v_B - v_C).$$

w를 소거하면 $v_B + v_C = e(v_B - v_C)$, 즉

$$(1-e)v_B = -(1+e)v_C.$$

위에서 구한 속도를 대입하면

$$(1-e)\cdot\frac{\lambda(1+e)u}{\lambda+1} = (1+e)\cdot\tfrac{1}{2}(1+e)u.$$

$u \neq 0$이고 $1+e > 0$이므로 양변을 $(1+e)u$로 나눌 수 있다.

$$2\lambda(1-e) = (1+e)(\lambda+1)$$
$$2\lambda - 2\lambda e = \lambda + 1 + e\lambda + e$$
$$\lambda - 1 = e(3\lambda + 1),$$

그리고 $3\lambda + 1 > 0$이므로

$$e = \frac{\lambda - 1}{3\lambda + 1},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

이로부터 이끌어 내야 할 결론은 다음과 같다.

$$\frac{1}{3} - e = \frac{(3\lambda+1) - 3(\lambda-1)}{3(3\lambda+1)} = \frac{4}{3(3\lambda+1)} > 0,$$

$\lambda > 1$이기 때문이다. 따라서 $e < \frac{1}{3}$이다. (또한 $\lambda > 1$이므로 $e > 0$이고, 따라서 충돌들은 실제로 완전 비탄성(perfectly inelastic) 충돌이 아니다.)

소문항 (ii)

세 번째 충돌 후 C의 속도는

$$w = v_B + v_C = (1+e)u\left(\frac{\lambda}{\lambda+1} - \frac{1}{2}\right) = \frac{(1+e)(\lambda-1)u}{2(\lambda+1)},$$

이고, $\lambda > 1$이므로 이 값은 양수이다. 즉 C는 이제 오른쪽으로, 다시 D를 향해 움직이며, D는 여전히 속력 $\frac{1}{2}(1-e)u$로 왼쪽으로 움직이고 있다.

> **생각해 보기** "같은 속력"이라는 조건은 어떤 방정식을 주는가? 그리고 e는 어떻게 없앨 수 있는가?

두 속력이 같을 조건은

$$\frac{(1+e)(\lambda-1)}{2(\lambda+1)} = \frac{1-e}{2}.$$

소문항 (i)에서 $1+e = \dfrac{4\lambda}{3\lambda+1}$이고 $1-e = \dfrac{2(\lambda+1)}{3\lambda+1}$이다. 이를 대입하고 공통인수 $\dfrac{1}{3\lambda+1}$을 약분하면

$$\begin{aligned} \frac{4\lambda(\lambda-1)}{\lambda+1} &= 2(\lambda+1) \\ 2\lambda^2 - 2\lambda &= \lambda^2 + 2\lambda + 1 \\ \lambda^2 - 4\lambda - 1 &= 0, \end{aligned}$$

이므로 $\lambda = 2 \pm \sqrt{5}$이다. 이 가운데 $\lambda > 1$을 만족하는 것은 $\lambda = 2+\sqrt{5}$뿐이다(다른 근은 음수이다). 그러면

$$e = \frac{1+\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})}{49-45} = \frac{4\sqrt{5}-8}{4} = \sqrt{5}-2.$$

따라서

$$\lambda = 2+\sqrt{5}, \qquad e = \sqrt{5}-2.$$

검산

- $e = \sqrt{5}-2 \approx 0.236$이고, 이는 소문항 (i)에서 요구한 대로 실제로 0과 $\frac{1}{3}$ 사이에 있다.
- $\lambda = 2+\sqrt{5} \approx 4.236$, $u = 1$, $e \approx 0.236$으로 놓고 세 충돌을 수치로 계산해 보면, 세 번째 충돌 직전에 $v_B = 1$(공교롭게도 정확히 1이다)이고 $v_C \approx -0.618$이다. 충돌 후에는 B가 정지하고 C는 약 0.382의 속력으로 오른쪽으로 움직이며, D는 약 0.382의 속력으로 왼쪽으로 움직인다. 공통 속력은 $\frac{1}{2}(1-e)u = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})u$이다.
- 극한의 경우: $\lambda \to 1$이면 $e \to 0$이다. 질량이 같고 $e = 0$이면 B와 C는 크기가 같고 방향이 반대인 속도로 만나므로, 한 덩어리로 합쳐지면 마땅히 그래야 하듯 정지한다.

흔한 실수

- C와 D 사이의 충돌에 대한 반발 방정식에서 부호를 틀리는 실수. 모든 속도를 같은 양의 방향을 기준으로 쓰고, "멀어지는 속력 $= e\times$ 가까워지는 속력"을 주의 깊게 적용하자.
- 세 번째 충돌에서 C가 B를 **향해** 움직이며 도착한다는 사실을 잊는 실수. 가까워지는 속력은 $v_B - \frac{1}{2}(1+e)u$가 아니라 $v_B - v_C = v_B + \frac{1}{2}(1+e)u$이다.
- 음수인 근 $\lambda = 2 - \sqrt{5}$를 버리지 않고 남겨 두는 실수.

STEP 너머

반발이 있는 충돌은 에너지 손실을 나타내는 가장 단순한 모형이다. 정면충돌에서 잃는 운동 에너지(kinetic energy)는 $1 - e^2$에 비례하며, $e = 1$은 에너지가 보존되는 탄성(elastic) 충돌의 경우이다. 대학 1학년 과정에서는 이러한 개념이 질량중심 좌표계(centre-of-mass frame)로 이어지는데, 이 좌표계에서는 어떤 두 물체의 충돌도 대칭적으로 보이고 위의 계산은 거의 자명해진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충돌을 이러한 방식으로 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.