풀이

STEP I 2016, 문제 1

순수수학 • 다항식의 항등식과 인수분해

> **STEP I 2016, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q1

핵심 아이디어

몫(quotient) $q_n(x)$는 사실 다항식(polynomial)이다. $2n+1$이 홀수이므로 $x+1$은 $x^{2n+1}+1$을 나누어떨어지게 하고, 그 몫은 부호가 번갈아 바뀌는 등비수열의 합이다. 따라서 소문항 (i)은 p_n을 전개하여 계수(coefficient)를 비교하는 문제이다. 소문항 (ii)의 핵심은 p_n의 꼴에서 나온다. $2n+1$과 x의 곱이 완전제곱수이면 p_n은 두 제곱의 차(difference of two squares)가 되므로 인수분해(factorisation)된다.

풀이

소문항 (i)

$x \neq -1$일 때, 첫째항이 1이고 공비가 $-x$인 등비급수(geometric series)의 합을 구하면

$$1 - x + x^2 - \cdots + x^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-x)^k = \frac{1-(-x)^{2n+1}}{1+x} = \frac{1+x^{2n+1}}{1+x},$$

이다. 여기서 $2n+1$이 홀수이므로 $(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$임을 이용하였다. 따라서

$$q_n(x) = x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - \cdots - x + 1,$$

이고, $2n+1$개의 계수는 모두 ± 1이며 부호가 번갈아 바뀐다. 이제 각 경우에 p_n을 전개한다.

$n = 1$.

$$p_1(x) = (x+1)^2 - 3x = x^2 + 2x + 1 - 3x = x^2 - x + 1 = q_1(x).$$

$n = 2$.

$$\begin{aligned} p_2(x) &= (x+1)^4 - 5x(x^2+x+1) \\ &= (x^4+4x^3+6x^2+4x+1) - (5x^3+5x^2+5x) \\ &= x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = q_2(x). \end{aligned}$$

$n = 3$. 먼저 $(x^2+x+1)^2 = x^4+2x^3+3x^2+2x+1$이므로

$$\begin{aligned} p_3(x) &= (x+1)^6 - 7x(x^2+x+1)^2 \\ &= (x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1) - (7x^5+14x^4+21x^3+14x^2+7x) \\ &= x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = q_3(x). \end{aligned}$$

따라서 $n = 1, 2, 3$일 때 $x \neq -1$에 대하여 $p_n(x) \equiv q_n(x)$이고, 이것이 증명하려던 것이다.

$n = 4$. 항등식(identity)이 성립하지 않음을 보이려면 x의 값 하나로 충분하다. $x = 1$일 때

$$p_4(1) = 2^8 - 9 \cdot 1 \cdot 3^3 = 256 - 243 = 13, \qquad q_4(1) = \frac{1+1}{1+1} = 1,$$

이므로 $p_4 \not\equiv q_4$이다. (끝까지 전개하면 $p_4(x) = x^8 - x^7 + x^6 + 2x^5 + 7x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 1$이고, x^5항부터 어긋난다.)

소문항 (ii)

생각해 보기 어떤 n과 어떤 x를 써야 하며, p_n은 도대체 어떻게 인수분해될 수 있을까?

$\dfrac{x^{2n+1}+1}{x+1}$을 주어진 수와 맞추어 보면 x와 n이 정해진다. 그다음에는 p_n의 꼴이 도움이 된다. $(x+1)^{2n} = ((x+1)^n)^2$은 언제나 제곱수이고, n이 홀수이면 $(x^2+x+1)^{n-1}$도 제곱수이다. 따라서 $(2n+1)x$까지 완전제곱수이면 $p_n(x)$는 두 제곱의 차가 된다.

(a) $n = 1$, $x = 300$으로 놓으면 $2n+1 = 3$이고 $3x = 900 = 30^2$이다. 소문항 (i)에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{300^3+1}{301} = q_1(300) = p_1(300) &= 301^2 - 3 \cdot 300 \\ &= 301^2 - 30^2 \\ &= (301-30)(301+30) = 271 \times 331. \end{aligned}$$

두 인수 모두 1이 아니다. (직접 계산하면 $300^2 - 300 + 1 = 89\,701 = 271 \times 331$이다.)

(b) $7^{49} = (7^7)^7$이므로 $n = 3$ (따라서 $2n+1 = 7$), $x = 7^7$로 놓는다. 그러면 $(2n+1)x =$

$7 \cdot 7^7 = 7^8 = (7^4)^2$은 완전제곱수이고, $n-1=2$는 짝수이다. 소문항 (i)에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{7^{49}+1}{7^7+1} = q_3(7^7) = p_3(7^7) &= (7^7+1)^6 - 7^8\,(7^{14}+7^7+1)^2 \\ &= [(7^7+1)^3]^2 - [7^4(7^{14}+7^7+1)]^2,\end{aligned}$$

이므로

$$\frac{7^{49}+1}{7^7+1} = \Big[(7^7+1)^3 - 7^4(7^{14}+7^7+1)\Big]\Big[(7^7+1)^3 + 7^4(7^{14}+7^7+1)\Big].$$

두 번째 인수는 분명히 1보다 크다. 첫 번째 인수의 경우, $(7^7+1)^3 > 7^{21}$이고

$$7^4(7^{14}+7^7+1) = 7^{18}+7^{11}+7^4 < 7^{19},$$

이므로 첫 번째 인수는 $7^{21}-7^{19} = 48\cdot 7^{19} > 1$보다 크다. 두 인수 모두 1이 아니므로 구하는 인수분해를 얻는다. (괄호를 전개하면 두 인수를 $7^{21}+3\cdot 7^{14}+3\cdot 7^7+1 \mp (7^{18}+7^{11}+7^4)$로 쓸 수도 있다.)

검산

- 소문항 (i)에 $x=1$을 대입하면 $p_1(1) = 4-3 = 1$, $p_2(1) = 16-15 = 1$, $p_3(1) = 64-63 = 1$로 모두 $q_n(1)=1$과 같지만, $p_4(1) = 13$이다.
- (a)에서 $271 \times 331 = 89\,701 = 300^2 - 300 + 1$이다.
- (b)에서 정확한 정수값을 컴퓨터로 확인하면 두 인수의 곱이 $(7^{49}+1)/(7^7+1)$과 같음을 알 수 있다. 두 인수는 각각 약 5.57×10^{17}, 5.60×10^{17}이다.

흔한 실수

- 두 인수가 모두 1이 아닌 이유를 밝히지 않는 것. (b)에서는 크기를 간단히 어림하는 과정이 필요하다.
- (b)에서 $n=24$나 $x=7$을 쓰는 것. 지수 49는 7×7로 써야 하며, 그러면 $x=7^7$, $2n+1=7$이 된다.

STEP 너머

여기서 쓴 기법은 오리푀유 인수분해(Aurifeuillean factorisation)의 특수한 경우이다. 이는 $x^4+4y^4 = (x^2+2y^2-2xy)(x^2+2y^2+2xy)$와 같은 항등식으로, $a^k \pm 1$ 꼴의 수를 뻔한 대수적 인수분해로 예상되는 것보다 더 잘게 쪼개 준다. 이러한 항등식은 원분

다항식(cyclotomic polynomial)에서 나오며, 원분다항식은 대학 1학년 대수학과 정수론(number theory) 강의에 등장한다. 또한 이 항등식들은 $2^k \pm 1$ 꼴의 큰 수를 인수분해하려는 탐색에 쓰였다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 인수분해와 소수에 대해 더 읽어 보기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.