풀이

STEP III 2015, 문제 9

역학 • 비선형 탄성 진동

> **STEP III 2015, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q9

핵심 아이디어

레일은 매끄럽고 수직항력(normal reaction)은 일을 하지 않으므로 에너지가 보존되며(conservation of energy), 이로부터 1계 방정식(first-order equation)이 곧바로 얻어진다. 레일 위의 모든 점에서 $PQ \geq a$이므로 줄은 절대 느슨해지지 않는다. 되돌아오는 점(turning point)은 $\dot{x} = 0$인 곳이다. 주기(period)는 중심에서 x_0까지 가는 데 걸리는 시간의 네 배이다. v가 작으면 입자는 출발점 가까이에 머무르므로 $\sqrt{x^2+a^2} - a \approx x^2/(2a)$이고, 치환(substitution) $x = x_0 u$를 하면 적분이 깔끔하게 정리된다.

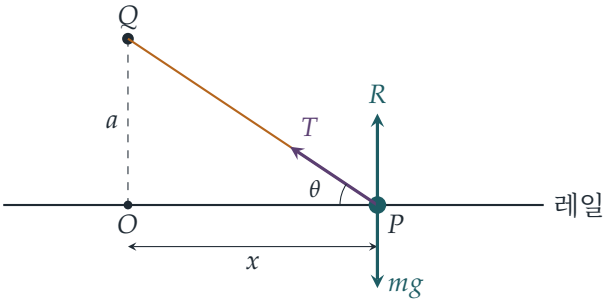
풀이

에너지 방정식

P를 입자로, 줄을 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 가볍고 탄성 있는 줄로 모형화한다. 레일을 x축으로 잡고, P는 Q에서 내린 수선의 발인 원점에서 출발한다고 하자. P가 x에 있을 때 Q까지의 거리는 $PQ = \sqrt{x^2+a^2} \geq a$이므로 줄은 팽팽하며, 늘어난 길이(extension)는

$$e = \sqrt{x^2+a^2} - a \quad (\geq 0).$$

이다.



P에 작용하는 힘은 무게, 레일의 수직항력 R(둘 다 운동 방향에 수직이므로 일을 하지 않는다), 그리고 장력(tension) T이다. 장력은 탄성 위치 에너지(elastic potential energy)가 $\lambda e^2/(2a)$인 보존력(conservative force)이다. 처음에 $e = 0$이고 속력이 v이므로, 에너지 보존에 의해

$$\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{\lambda}{2a}\left(\sqrt{x^2+a^2} - a\right)^2 = \tfrac{1}{2}mv^2.$$

이다. 양변에 $2/m$을 곱하고 $k^2 = \lambda/(ma)$로 놓으면

$$\dot{x}^2 = v^2 - k^2\left(\sqrt{x^2+a^2} - a\right)^2,$$

이 되어 요구된 식을 얻는다.

최대 변위와 그곳에서의 가속도

늘어난 길이 e는 $|x|$에 따라 증가하므로, P가 바깥으로 움직일수록 $\dot{x}^2$은 감소하고, P는 $\dot{x} = 0$이 될 때까지 바깥으로 움직인다. 그 점에서 $k\left(\sqrt{x_0^2+a^2} - a\right) = v$이다($e \geq 0$이므로 양의 근을 택한다). 따라서

$$\sqrt{x_0^2+a^2} = a + \frac{v}{k} \quad \Longrightarrow \quad x_0^2 = \left(a + \frac{v}{k}\right)^2 - a^2 = \frac{2av}{k} + \frac{v^2}{k^2},$$

이고, 이로부터

$$x_0 = \frac{\sqrt{v\,(2ak+v)}}{k}.$$

를 얻는다.

가속도를 구하기 위해 레일 방향으로 힘을 분해한다. θ를 PQ와 레일 사이의 각이라 하면 $\cos\theta = x/\sqrt{x^2+a^2}$이고, 장력의 레일 방향 성분은 O를 향하는 $T\cos\theta$이다. $T = \lambda e/a$이므로

$$m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{a}\left(\sqrt{x^2+a^2} - a\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}, \qquad \text{따라서} \qquad \ddot{x} = -k^2\left(\sqrt{x^2+a^2} - a\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

이다. (에너지 방정식을 t에 대해 미분하고 $2\dot{x}$를 약분해도 같은 결과를 얻는다.) $x = x_0$에서 $\sqrt{x_0^2+a^2} - a = v/k$이고 $\sqrt{x_0^2+a^2} = (ak+v)/k$이므로

$$\ddot{x} = -k^2 \cdot \frac{v}{k} \cdot \frac{k\,x_0}{ak+v} = -\frac{k^2 v\,x_0}{ak+v} = -\frac{kv\sqrt{v\,(2ak+v)}}{ak+v}.$$

이다. 따라서 x_0에서 가속도의 크기는 $\dfrac{kv\sqrt{v(2ak+v)}}{ak+v}$이고, 방향은 레일을 따라 처음 위치 쪽을 향한다.

주기

$\dot{x}^2$에 대한 식은 x^2에만 의존하므로 운동은 O에 대해 대칭이다. 입자는 $-x_0$와 x_0 사이에서 진동하며, 네 개의 사분 구간 $O \to x_0 \to O \to -x_0 \to O$ 각각에 걸리는 시간은 같다. 첫 번째 사분 구간에서 $\dot{x} > 0$이므로 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/\dot{x}$이고, 주기는

$$\tau = 4\int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{v^2 - k^2\left(\sqrt{x^2+a^2}-a\right)^2}}.$$

이다. 피적분함수는 x_0에서 발산하지만 $(x_0-x)^{-1/2}$ 정도로만 발산하므로 적분은 수렴(converge)한다.

? 생각해 보기 $v \ll ka$는 x의 크기에 대해 무엇을 알려 주는가?

$x_0^2 = 2av/k + v^2/k^2$이므로, $v/k \ll a$이면 $x_0^2 \approx 2av/k$이고 따라서 $x_0^2/a^2 \approx 2v/(ka) \ll 1$이다. 그러므로 적분 구간의 모든 x는 $|x| \ll a$를 만족하고, 이항 전개(binomial expansion)에 의해

$$\sqrt{x^2+a^2} - a = a\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2} - a \approx \frac{x^2}{2a}.$$

이다. 주기는

$$\tau \approx 4\int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{v^2 - k^2x^4/(4a^2)}}, \qquad x_0 \approx \sqrt{\frac{2av}{k}},$$

가 되며, $k^2x_0^4/(4a^2) = v^2$이므로 이 근사적인 x_0는 정확히 새 분모가 0이 되는 점이다. 이제 $x = x_0u$로 치환하면 $\mathrm{d}x = x_0\,\mathrm{d}u$이고 $k^2x^4/(4a^2) = v^2u^4$이므로

$$\tau \approx 4\int_0^1 \frac{x_0\,\mathrm{d}u}{v\sqrt{1-u^4}} = \frac{4}{v}\sqrt{\frac{2av}{k}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}} = \sqrt{\frac{32a}{kv}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}},$$

이다. 여기서 $\frac{16}{v^2}\cdot\frac{2av}{k} = \frac{32a}{kv}$를 이용하였다. 이것이 요구된 근사식이다.

검산

- 단위: $k^2 = \lambda/(ma)$의 단위는 s^{-2}이므로 v/k는 길이이고(x_0에서의 늘어난 길이이므로 당연히 그래야 한다), $\sqrt{a/(kv)}$는 시간이다.
- $m=1, \lambda=2, a=1, v=1$이면 $k=\sqrt{2}$, $x_0 = \sqrt{1+2\sqrt{2}} \approx 1.3836$이고 x_0에서의 가속도는 ≈ -1.1462이다. 운동 방정식을 수치적으로 한 단계씩 풀어 나가면 같은 되돌아오는 점을 얻고, 주기는 약 7.612로 적분값과 일치한다.

- $a = 1, k = 2, v = 0.001$일 때 주기 적분의 정확한 값은 165.862이고, 근사식으로는 165.833이다. 여기서 $\int_0^1 (1-u^4)^{-1/2}\,\mathrm{d}u \approx 1.3110$이다. $v \to 0$일 때 두 값의 비는 1로 수렴한다.

흔한 실수

- 늘어난 길이로 $\sqrt{x^2+a^2} - a$ 대신 x나 $\sqrt{x^2+a^2}$을 사용하는 것. 줄은 자연 길이(natural length)에서 출발한다.
- 장력을 분해하는 것을 잊는 것. 레일 방향으로는 성분 $T\cos\theta$만 작용한다.
- 주기를 $2\int_0^{x_0}$이나 $\int_0^{x_0}$로 잡는 것. 진동은 $-x_0$와 x_0 사이에서 일어나므로 사분 주기 네 개가 필요하다.

STEP 너머

v가 작을 때 복원력(restoring force)은 x가 아니라 대략 x^3에 비례하므로, 이것은 주기가 진폭(amplitude)에 의존하는 비선형 진동자(nonlinear oscillator)이다. 단순 조화 운동(simple harmonic motion)과 달리 에너지가 줄어들수록 주기는 $v^{-1/2}$처럼 커진다. 적분 $\int_0^1 (1-u^4)^{-1/2}\,\mathrm{d}u$는 타원 적분(elliptic integral)(렘니스케이트 상수(lemniscate constant)의 절반)으로, 진자의 정확한 주기를 구할 때에도 나타나는 종류의 적분이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)은 이러한 관점에서 에너지 방법과 진동을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.