풀이

STEP III 2015, 문제 8

순수수학 • 극좌표 미분방정식

> **STEP III 2015, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q8

이 문제는 *Beyond STEP*의 8.4 절 **원으로 감겨드는 나선**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch08/limit-cycle.html

핵심 아이디어

두 미분방정식(differential equation)은 모두 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$와 $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$라는 조합으로 이루어져 있는데, 이것들은 바로 극좌표(polar coordinates)가 간단하게 만들어 주는 식이다. 극좌표로 쓰면 이들은 각각 $r^2\,\mathrm{d}\theta$와 $r\,\mathrm{d}r$가 된다. 그래서 θ를 곡선을 따라가는 매개변수(parameter)로 보고, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$를 θ-도함수(derivative)들의 비로 쓴 다음, 삼각함수 식이 정리되어 사라지게 한다. 소문항 (ii)에서는 추가된 항들 때문에 방정식이 r에 대한 베르누이 방정식(Bernoulli equation)이 되는데, 치환(substitution) $u = r^{-2}$를 하면 이것이 선형(linear) 방정식이 된다.

풀이

$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$를 r'으로, $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$로 쓰자. 곡선 $r = r(\theta)$를 따라

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = r'c - rs, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = r's + rc, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta}.$$

어느 방정식이든 양변에 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$를 곱하면, $P\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = Q$ 꼴의 방정식은

$$P\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - Q\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = 0.$$

이 된다. 다음 두 항등식이 모든 일을 해 준다.

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = rc(r's + rc) - rs(r'c - rs) = r^2(c^2 + s^2) = r^2,$$
$$x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = rc(r'c - rs) + rs(r's + rc) = rr'.$$

소문항 (i)

여기서는 $P = y + x$, $Q = y - x$이므로

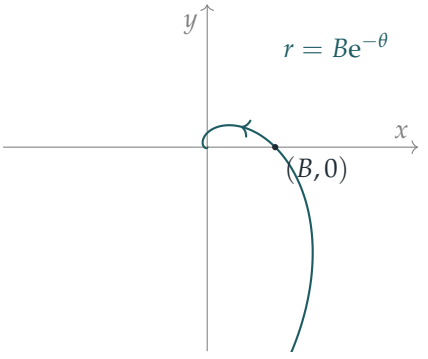
$$(y+x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - (y-x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left(x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)$$
$$= r^2 + rr'.$$

따라서 방정식은 $r(r' + r) = 0$이고, $r > 0$이므로 r로 나누면

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} + r = 0,$$

을 얻는다. 이것이 보이려던 식이다.

이 방정식은 변수분리형(separable)이다(또는 그냥 지수적 감소(exponential decay)임을 알아보면 된다). 따라서 $B > 0$에 대해 $r = B\mathrm{e}^{-\theta}$이다. 이것은 **등각 나선**(equiangular spiral), 즉 로그 나선(logarithmic spiral)이다. θ가 증가하면 곡선은 반시계 방향으로 감기며 원점으로 다가가지만 원점에 닿지는 않는다. θ가 감소하면 곡선은 한없이 바깥으로 감겨 나간다. $r/r' = -1$이므로 이 곡선은 원점에서 나가는 모든 반직선과 같은 각도, 즉 안쪽 방향 반지름과 45°의 각을 이루며 만난다. $B\mathrm{e}^{-\theta} = \mathrm{e}^{-(\theta - \ln B)}$이므로, B가 달라지면 같은 나선을 회전시킨 곡선이 된다.



화살표는 θ가 증가하는 방향을 나타낸다. 나선은 한 바퀴 돌 때마다 $\mathrm{e}^{2\pi} \approx 535$배로 줄어들기 때문에, 어떤 축척에서든 보이는 것은 대략 한 바퀴뿐이고 나머지는 원점 주위에 촘촘히 감겨 있다.

소문항 (ii)

이제 $P = y + x - x(x^2+y^2)$, $Q = y - x - y(x^2+y^2)$이고 $x^2+y^2 = r^2$이다. 새로 생긴 항들은

$$-r^2\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right) = -r^2 \cdot r^2 = -r^4,$$

를 더하므로, 원래 항들에는 소문항 (i)의 결과를 쓰면 방정식은

$$r^2 + rr' - r^4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = r^3 - r,$$

이 된다. 여기서도 $r > 0$으로 나누었다.

? **생각해 보기** 방정식이 선형이 되지 못하게 막는 r^3 항은 어떻게 처리할까?

이것은 베르누이 방정식이다. 목표로 하는 답이 r^2로 표현되어 있으므로 $u = r^{-2}$를 써 보는 것이 좋겠다. 그러면

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -2r^{-3}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -2r^{-3}(r^3 - r) = -2 + 2u.$$

따라서 $u' - 2u = -2$이고, 이는 상수계수 선형 방정식이다. $u = 1$은 특수해(particular solution)이고 $A\mathrm{e}^{2\theta}$는 동차 방정식(homogeneous equation)의 해이므로

$$\frac{1}{r^2} = 1 + A\mathrm{e}^{2\theta} \qquad \Longrightarrow \qquad r^2 = \frac{1}{1 + A\mathrm{e}^{2\theta}},$$

을 얻고, 이것이 요구된 꼴이다. (변수를 분리하고 $\dfrac{1}{r(r-1)(r+1)}$을 부분분수(partial fractions)로 분해해도 같은 결과를 얻지만 더 수고스럽다.) 곡선은 $1 + A\mathrm{e}^{2\theta} > 0$인 곳에서만 존재한다.

해곡선의 모양

먼저 $A = \pm\mathrm{e}^{-2\alpha}$이면 $A\mathrm{e}^{2\theta} = \pm\mathrm{e}^{2(\theta-\alpha)}$이므로, A에 대한 곡선은 $A = \pm 1$에 대한 곡선을 α만큼 회전시킨 것임에 주목하자. 따라서 A의 부호에 따라 실제로는 세 가지 모양만 있다.

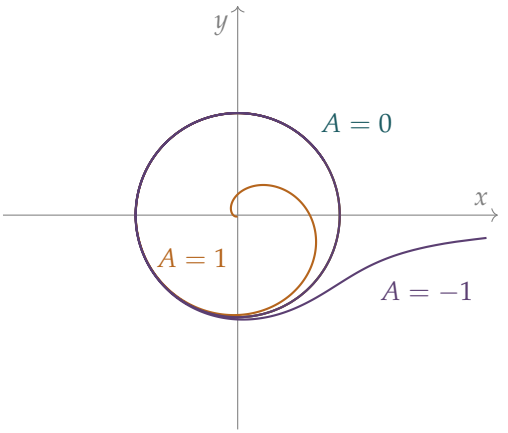
- $A = 0$: $r = 1$, 즉 단위원이다.
- $A > 0$: $1 + A\mathrm{e}^{2\theta} > 1$이므로 $r < 1$이고, 곡선은 모든 θ에 대해 정의된다. $r' = r(r^2-1) < 0$이므로 r는 계속 감소한다. $\theta \to -\infty$일 때 $r \to 1$이므로 곡선은 안쪽에서 단위원을 향해 감겨 나간다. $\theta \to +\infty$일 때 $r \approx A^{-1/2}\mathrm{e}^{-\theta} \to 0$이므로 곡선은 나선을 그리며 원점으로 들어가고, 점점 소문항 (i)의 나선과 비슷해진다.
- $A < 0$: $\mathrm{e}^{2\theta} < -1/A$, 즉 $\theta < \theta_0 = \frac{1}{2}\ln(-1/A)$이어야 한다. 이때 $r > 1$이고 $r' > 0$이다. $\theta \to -\infty$일 때 r는 위에서 $r \to 1$로 다가가므로 곡선은 바깥에서 단위원을 향해 감겨 들어간다. $\theta \to \theta_0^-$일 때 $r \to \infty$이다. θ_0 근처에서는 ($A\mathrm{e}^{2\theta_0} = -1$이므로)

$1 + Ae^{2\theta} \approx 2(\theta_0 - \theta)$이고, 따라서 $r \approx \left(2(\theta_0 - \theta)\right)^{-1/2}$이며, 곡선에서 직선 $\theta = \theta_0$까지의 거리는

$$r\sin(\theta_0 - \theta) \approx r(\theta_0 - \theta) \approx \frac{1}{2r} \to 0.$$

이다. 그러므로 곡선은 원점을 지나고 각 θ_0를 이루는 직선을 점근선(asymptote)으로 가지며 무한히 뻗어 나가고, 시계 방향 쪽에서 그 직선에 다가간다. $A = -1$이면 $\theta_0 = 0$이고, 큰 x에 대해 곡선은 $y = -\frac{1}{2x}$에 가까워진다.

단위원은 극한 순환(limit cycle)이다. 다른 모든 해는 $\theta \to -\infty$일 때 나선을 그리며 단위원으로 다가가고, θ가 증가하면 단위원에서 멀어진다.



자주색 곡선($A = -1$)은 양의 x축 바로 아래에서 그 축을 따라 무한히 뻗어 나간다.

검산

- $r = Be^{-\theta}$를 (i)의 원래 방정식에 몇몇 점에서 다시 대입하면(x, y, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$로 바꾸어서) o이 나온다. (ii)의 식도 양수와 음수의 여러 A 값에 대해 마찬가지이다.
- $A = 0$이면 $r = 1$이고, 실제로 상수 $r = 1$은 $r' = r^3 - r$를 만족한다. x, y로 보면 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위에서는 추가된 항들이 원래 항들과 정확히 상쇄된다.
- $r(0) = \frac{1}{2}$(즉 $A = 3$)에서 시작하면 식은 $r(2) = 1/\sqrt{1 + 3e^4} \approx 0.0779$를 주며, 이는 $r' = r^3 - r$를 단계별로 수치적으로 푼 결과와 소수점 아래 여러 자리까지 일치한다.
- $A = -1$, $\theta = -10^{-4}$에서 $r \approx 70.71$이고 x축까지의 거리는 $0.00707 \approx 1/(2r)$이므로 점근선이 확인된다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$를 r가 변한다는 것을 고려하여 $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta)/(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta)$로 구해야 한다는 것을 잊는 것, 즉 r' 항들을 빠뜨리는 것.
- $A < 0$일 때 $1 + A\mathrm{e}^{2\theta} > 0$이라는 제한을 놓쳐서, 이 곡선들이 유한한 각도에서 무한히 뻗어 나간다는 것을 알아차리지 못하는 것.
- A의 부호마다 곡선을 하나씩만 그리고, 나머지 곡선들이 그것을 회전시킨 것이라는 말을 하지 않는 것.

STEP 너머

방정식 $r' = r^3 - r$는 평면 역학계(dynamical system)를 극좌표로 나타낸 것이고, 단위원은 **극한 순환**, 즉 근처의 궤적들이 나선을 그리며 다가가거나 멀어지는 고립된 닫힌 궤도이다. 이처럼 반지름 방향 방정식이 분리되는 계는 비선형 미분방정식과 상평면 분석(phase-plane analysis) 강의에서 가장 먼저 다루는 표준적인 예이며, 푸앵카레(Poincaré)–벤딕손(Bendixson) 정리로 이어진다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에 비선형계와 극한 순환을 다룬 좋은 장이 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.