풀이

STEP III 2015, 문제 7

순수수학 • 미분 연산자

> **STEP III 2015, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q7

핵심 아이디어

x의 거듭제곱은 $\mathrm{D} = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$의 고유함수(eigenfunction)이다. 즉 x^a에 D를 적용하면 단지 a가 곱해질 뿐이다. 따라서 D^n은 다항식(polynomial)에 항별로 작용하여 x^r의 계수에 r^n을 곱하는데, 바로 여기서 최종 합의 r^n이 나온다. 나누어떨어짐(divisibility)에 대해서는, D를 한 번 적용할 때마다 인수 $(1-x)$의 거듭제곱 지수가 많아야 하나씩만 줄어든다는 점에 주목한다.

풀이

첫 번째 결과

임의의 상수 a에 대하여 (a가 정수가 아니면 $x > 0$이라 하자)

$$\mathrm{D}x^a = x \cdot ax^{a-1} = ax^a.$$

D를 한 번 더 적용하고, 상수 a를 밖으로 꺼낸 뒤 이 결과를 쓰면

$$\mathrm{D}^2x^a = \mathrm{D}(ax^a) = a\,\mathrm{D}x^a = a^2x^a,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. D는 선형(linear)이므로 (상수 α, β에 대하여 $\mathrm{D}(\alpha f + \beta g) = \alpha\,\mathrm{D}f + \beta\,\mathrm{D}g$), 이 과정을 반복하면 수학적 귀납법(induction)에 의해

$$\mathrm{D}^n x^a = a^n x^a \qquad (n \geq 1).$$

를 얻는다.

소문항 (i)

$c_r \neq 0$인 $\mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{r} c_k x^k$로 쓰자. 선형성과 위의 결과에 의해

$$\mathrm{D}^n \mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{r} c_k \, k^n x^k.$$

이것은 x^r보다 높은 차수의 항이 없는 다항식이고, x^r의 계수는 $r^n c_r$이다. $r \geq 1$이므로 $r^n \neq 0$이고, $c_r \neq 0$이므로 $r^n c_r \neq 0$이다. 따라서 $\mathrm{D}^n \mathrm{P}(x)$는 차수(degree)가 정확히 r인 다항식이다.

($r \geq 1$이라는 조건은 중요하다. $0^n = 0$이므로 상수 다항식은 0으로 보내지기 때문이다.)

소문항 (ii)

m을 고정한다. $1 \leq n \leq m$일 때 다음이 성립함을 n에 대한 귀납법으로 증명한다.

$$\mathrm{D}^n (1-x)^m = (1-x)^{m-n} \, \mathrm{Q}_n(x) \quad \text{어떤 다항식} \mathrm{Q}_n.$$

기저 단계(*base case*). $\mathrm{D}(1-x)^m = x \cdot (-m(1-x)^{m-1}) = (1-x)^{m-1} \cdot (-mx)$이므로 $\mathrm{Q}_1(x) = -mx$이다.

귀납 단계(*inductive step*). $n < m$인 어떤 n에 대하여 명제가 성립한다고 가정하자. 그러면 $m - n \geq 1$이다. 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{n+1}(1-x)^m &= x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \Big[(1-x)^{m-n} \mathrm{Q}_n(x) \Big] \\
&= x \Big[-(m-n)(1-x)^{m-n-1} \mathrm{Q}_n(x) + (1-x)^{m-n} \mathrm{Q}_n'(x) \Big] \\
&= (1-x)^{m-n-1} \cdot x \Big[(1-x)\mathrm{Q}_n'(x) - (m-n)\mathrm{Q}_n(x) \Big].
\end{aligned}$$

괄호 안은 다항식이므로, 이 식은 $\mathrm{Q}_{n+1}(x) = x[(1-x)\mathrm{Q}_n'(x) - (m-n)\mathrm{Q}_n(x)]$으로 두면 원하는 꼴이 된다.

생각해 보기 귀납 단계에서 $n < m$이라는 조건은 어디에 쓰였는가?

인수 $(1-x)^{m-n-1}$을 묶어 내는 것은 $m - n - 1 \geq 0$, 즉 $n < m$일 때에만 다항식 인수로서 의미가 있다. $n = m$이 되면 더 이상 잃을 $(1-x)$ 인수가 남아 있지 않으므로, 귀납법은 (올바르게) 거기서 멈춘다.

따라서 $n < m$인 모든 양의 정수 n에 대하여 $\mathrm{D}^n (1-x)^m$은 $(1-x)^{m-n}$으로 나누어떨어진다.

소문항 (iii)

이항정리(binomial theorem)로 전개하면

$$(1-x)^m = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} x^r.$$

소문항 (i)에서와 똑같이 D^n을 항별로 적용하면

$$\mathrm{D}^n (1-x)^m = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} r^n x^r.$$

소문항 (ii)에 의해 $n < m$이면 좌변은 $m - n \geq 1$인 $(1-x)^{m-n}\mathrm{Q}_n(x)$와 같으므로 $x = 1$에서 0이 된다. 따라서 우변에 $x = 1$을 대입하면

$$\sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} r^n = 0,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. ($r = 0$인 항은 $0^n = 0$인데, 이는 D가 상수항을 없앤다는 사실과 일치한다.)

검산

$m = 3, n = 2$로 두면 합은 $0 - 3 \cdot 1 + 3 \cdot 4 - 1 \cdot 9 = 0$이다. $m = 4, n = 3$으로 두면 $0 - 4 + 6 \cdot 8 - 4 \cdot 27 + 64 = 0$이다. 이 항등식은 $1 \leq n < m \leq 19$인 모든 경우에 대해 컴퓨터로도 확인하였고, $m \leq 11$에 대해서는 $(1-x)^{m-n}$이 $\mathrm{D}^n(1-x)^m$을 나누는 **정확한** 거듭제곱이라는 사실도 함께 확인하였다. 대조적으로, $n = m$이면 합은 더 이상 0이 아니다. $m = 2$일 때 합은 $0 - 2 + 4 = 2 = 2!$이고, 일반적으로는 $(-1)^m m!$이다.

흔한 실수

- $\mathrm{D}^2 x^a$를 $x^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} x^a = a(a-1)x^a$로 쓰는 것. D^2는 D를 두 번 적용한 것이지, 이계도함수에 x^2를 곱한 것이 아니다.
- 소문항 (i)에서 최고차항 계수(leading coefficient) $r^n c_r$이 0이 아닌 이유를 밝히지 않는 것. 바로 여기서 $r \geq 1$이 쓰인다.
- 소문항 (iii)에서 D^n을 적용하기 **전에** $(1-x)^m$에 $x = 1$을 대입하는 것. 핵심은 인수 $(1-x)$가 $n < m$번의 적용 뒤에도 살아남는다는 점이다.

STEP 너머

연산자(operator) $x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$는 오일러(Euler) 연산자(Euler operator)라고도 불리며, x^a는 고윳값(eigenvalue)이 a인 고유함수이다. 이 연산자는 $x^2y'' + bxy' + cy = 0$과 같은 오일러-코시 방정식(Euler–Cauchy equations)을 다루는 자연스러운 도구로, 이러한 방정식은 $x = e^t$로 치환하면 상수계수 방정식이 된다. 소문항 (iii)의 항등식은 차수가 m보다 작은 다항식의 m계 유한 차분(finite difference)이 0이라는 것을 말해 주며, 스털링(Stirling) 수(Stirling numbers), 그리고 포함-배제(inclusion–exclusion)를 이용한 전사(surjection)의 개수 세기와 밀접하게 연결되어 있다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문서)는 오일러 방정식을 다루고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)에는 이런 스타일의 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.