풀이

STEP III 2015, 문제 6

순수수학 • 근의 대칭함수

> **STEP III 2015, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q6

핵심 아이디어

w, z 쌍에 관한 모든 것은 그 합과 곱이 결정한다. w와 z는 $t^2 - (w+z)t + wz = 0$의 두 근(root)이기 때문이다. 그러면 소문항 (i)은 실수 계수 이차방정식(quadratic)이 언제 실근을 갖는가에 대한 명제가 되고, 조건 $u^2 \leq 2v$는 모습을 바꾼 판별식(discriminant)이다. 소문항 (ii)에서는 처음 두 식이 곱 wz를 결정하고, 그러면 세 번째 식은 u만의 삼차방정식(cubic)이 되는데, 그 근 하나는 눈으로 찾을 수 있다.

풀이

소문항 (i)

모든 것을 이끌어 가는 항등식(identity)은 다음과 같다.

$$2v - u^2 = 2(w^2+z^2) - (w+z)^2 = w^2 - 2wz + z^2 = (w-z)^2.$$

또한 $wz = \frac{1}{2}((w+z)^2 - (w^2+z^2)) = \frac{1}{2}(u^2 - v)$임에 주목한다.

w와 z가 실수인 경우: 이때 $u = w+z$와 $v = w^2+z^2$는 당연히 실수이고, $w-z$가 실수이므로 $2v - u^2 = (w-z)^2 \geq 0$이다. 따라서 $u^2 \leq 2v$이다.

역으로, u와 v가 실수이고 $u^2 \leq 2v$라고 하자. 그러면 $p = wz = \frac{1}{2}(u^2 - v)$도 실수이다.

$$(t-w)(t-z) = t^2 - ut + p,$$

이므로 수 w와 z는 정확히 계수가 실수인 이차방정식 $t^2 - ut + p = 0$의 두 근이다. 이 방정식의 판별식은

$$u^2 - 4p = u^2 - 2(u^2 - v) = 2v - u^2 \geq 0,$$

이므로 두 근은 모두 실수이다. 따라서 w와 z는 실수이고, 이것으로 동치(equivalence)의 증명이 끝난다.

? 생각해 보기 왜 "u와 v가 실수"라는 조건만으로는 충분하지 않을까?

켤레(conjugate) 복소수 쌍도 합과 제곱의 합이 실수이기 때문이다. 예를 들어 $w = 1 + 2\mathrm{i}$, $z = 1 - 2\mathrm{i}$이면 $u = 2$, $v = -6$으로 둘 다 실수이지만 $u^2 = 4 > -12 = 2v$이다. 이 부등식이 바로 실수가 아닌 켤레 쌍을 배제하는 조건이다.

소문항 (ii)

삼차방정식으로 바꾸기. 첫 번째 식은 $u = w + z$라는 뜻이다. $v = w^2 + z^2$라 쓰면 두 번째 식은 $v = u^2 - \frac{2}{3}$이므로

$$wz = \tfrac{1}{2}(u^2 - v) = \tfrac{1}{3}.$$

세제곱에 대해서는 잘 알려진 항등식

$$w^3 + z^3 = (w+z)^3 - 3wz(w+z) = u^3 - u.$$

을 쓴다. 따라서 세 번째 식은 $u^3 - u - \lambda u = -\lambda$, 즉

$$u^3 - (1+\lambda)u + \lambda = 0.$$

이 된다. $u = 1$을 대입하면 $1 - 1 - \lambda + \lambda = 0$이므로 $u - 1$은 인수이고,

$$u^3 - (1+\lambda)u + \lambda = (u-1)(u^2 + u - \lambda).$$

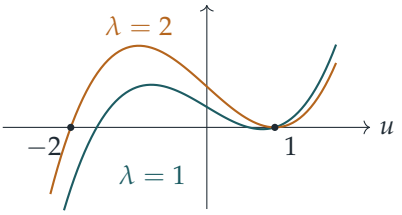
근의 개수 세기. $\lambda > 0$이므로 이차 인수의 판별식은 $1 + 4\lambda > 0$이다. 따라서 서로 다른 두 실근

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\lambda}}{2}.$$

를 갖는다. 이 중 하나가 1과 같은 것은 정확히 $1^2 + 1 - \lambda = 0$, 즉 $\lambda = 2$일 때이다. 따라서

- $\lambda \neq 2$이면 u의 가능한 값은 1과 $\frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1+4\lambda}\right)$로, 서로 다른 세 값이며 모두 실수이다.
- $\lambda = 2$이면 삼차식은 $(u-1)^2(u+2)$이고 값은 $u = 1$과 $u = -2$의 두 개뿐이다.

이 값들은 각각 실제로 나타난다. u가 주어지면 w와 z를 $t^2 - ut + \frac{1}{3} = 0$의 근으로 잡자. 그러면 $w + z = u$, $wz = \frac{1}{3}$이고, 위의 단계를 거꾸로 밟으면 세 식이 모두 성립함을 알 수 있다. 따라서 예외가 되는 값은 $\lambda = 2$이다.



위 그림(세로 방향으로 축소함)은 $u^3-(1+\lambda)u+\lambda$를 나타낸 것으로, $\lambda=1$일 때는 축과 서로 다른 세 점에서 만나고, $\lambda=2$일 때는 곡선이 $u=1$에서 축에 접하기만 한다.

w와 z는 반드시 실수일까? 그렇지 않다. u가 실수이고 $v=u^2-\frac{2}{3}$도 실수이므로, 소문항 (i)에 의해 w와 z가 실수일 필요충분조건은 $u^2\le 2v=2u^2-\frac{4}{3}$, 즉 $u^2\ge\frac{4}{3}$이다. 근 $u=1$은 모든 λ에 대해 존재하고 $1<\frac{4}{3}$이므로, 이 근은 항상 실수가 아닌 w와 z를 준다.

구체적으로, $u=1$이면 $t^2-t+\frac{1}{3}=0$이므로

$$w=\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{3}},\qquad z=\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{3}}.$$

확인해 보면 $w+z=1=u$이고, $wz=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$이므로 $w^2+z^2=1-\frac{2}{3}=u^2-\frac{2}{3}$이며, $w^3+z^3=u^3-3wz\,u=1-1=0$이므로 모든 $\lambda>0$에 대해 $w^3+z^3-\lambda u=-\lambda$이다. 이것은 반례(counterexample)이다. u의 세 값은 모두 실수이지만 w와 z는 실수가 아닐 수 있다.

검산

- $\lambda=1$일 때 u의 값은 1과 $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})\approx 0.618,\ -1.618$이고, 각각 $u^3-2u+1=0$을 만족한다.
- $\lambda=2$일 때 삼차식 u^3-3u+2는 $u=-2$에서 0이 되고$(-8+6+2=0)$, 이 식과 그 도함수(derivative) $3u^2-3$이 모두 $u=1$에서 0이 되므로 중근(double root)임이 확인된다.
- 여러 λ 값에 대해 컴퓨터로 각 u로부터 w와 z를 만들어 세 식이 반올림 오차 범위에서 모두 성립함을 확인하였고, $\lambda=2$를 제외하면 서로 다른 u의 값이 세 개임도 확인하였다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 한쪽 방향만 증명하는 것. 역을 보이려면 곱 wz가 실수여야 하며, 바로 여기서 v가 실수라는 조건이 쓰인다.
- 이차식의 근이 1과 다른지 확인하지 않아 예외 값 $\lambda=2$를 놓치는 것.

- u가 실수이므로 w와 z도 실수여야 한다고 가정하는 것. w와 z의 대칭함수(symmetric functions)가 실수라는 사실은 켤레 쌍과도 똑같이 잘 맞아떨어진다.

STEP 너머

수의 쌍(또는 임의의 수의 집합)이 그 대칭함수로 결정된다는 생각은 대칭다항식(symmetric polynomials) 이론의 출발점이다. w와 z에 대한 모든 대칭다항식은 $w+z$와 wz로 나타낼 수 있으며, 뉴턴(Newton)의 항등식(Newton's identities)은 w^3+z^3 같은 거듭제곱 합(power sums)을 이들과 연결한다. 같은 추론을 판별식과 함께 쓰면 실수 계수 다항식의 근이 언제 모두 실수인지 판정할 수 있다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수 공부에 훌륭한 길잡이가 되며, Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 대칭다항식을 더 깊이 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.