풀이

STEP III 2015, 문제 5

순수수학 • 무한 강하법에 의한 무리성

> **STEP III 2015, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q5

이 문제는 *Beyond STEP*의 1.3 절 **가장 작은 반례**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch01/well-ordering.html

핵심 아이디어

이것은 **무한강하법**(infinite descent)에 의한 증명이다. $\sqrt{2}$가 유리수(rational)라면, 곱했을 때 $\sqrt{2}$를 정수로 만드는 가장 작은 양의 정수가 존재할 것이고, 우리는 그보다 더 작은 것을 만들어 낸다. 이 일은 $\sqrt{2}-1$을 곱하면 해결된다. 이 수는 0과 1 사이에 있으면서도 우리를 집합 안에 머물게 해 주기 때문이다. 2의 세제곱근에 대해 같은 기법을 쓰려면 $2^{2/3}$까지 함께 다루는 집합이 필요하다. 문제가 먼저 두 수를 서로 연결하라고 요구하는 것은 이 때문이다.

풀이

소문항 (i)

3단계. 1단계의 가정에 의해, $q \neq 0$인 어떤 정수 p, q에 대하여 $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$이다. $\sqrt{2} > 0$이므로 p와 q를 모두 양수로 잡을 수 있다. 그러면

$$q\sqrt{2} = p$$

는 정수이고 q는 양의 정수이므로 $q \in S$이다. 따라서 S는 공집합이 아니다.

5단계. $k \in S$이므로 수 $m = k\sqrt{2}$는 정수이다. $n = (\sqrt{2}-1)k$에 대하여 두 가지를 확인해야 한다.

- n은 양의 정수이다. $n = k\sqrt{2} - k = m - k$는 정수의 차이고, $k > 0$이고 $\sqrt{2} > 1$이므로 $n > 0$이다.
- $n\sqrt{2}$는 정수이다.

$$n\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)k\sqrt{2} = 2k - k\sqrt{2} = 2k - m,$$

  이것 역시 정수의 차이다.

따라서 $(\sqrt{2} - 1)k \in S$이다.

6단계. $1 < 2 < 4$이므로 $1 < \sqrt{2} < 2$이고, 따라서 $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$이다. 그러므로 $k > 0$이므로

$$(\sqrt{2} - 1)k < k.$$

즉 5단계는 S에 속하면서 k보다 작은 양의 정수를 주며, 이는 4단계에서 k를 S의 가장 작은 원소로 택한 것에 모순이다. (공집합이 아닌 양의 정수의 집합은 언제나 가장 작은 원소를 가지고, 3단계에서 S가 공집합이 아님을 보였으므로 4단계는 정당하다.) 세운 가정은 1단계뿐이었으므로 그 가정이 거짓이어야 한다. 즉 $\sqrt{2}$는 무리수(irrational)이다.

소문항 (ii)

$a = 2^{1/3}$이라 하면 $a^2 = 2^{2/3}$이고 $a^3 = 2$이다.

동치(equivalence). a가 유리수이면 유리수의 곱인 a^2도 유리수이다. 역으로 a^2이 유리수이면, $a^2 \neq 0$이므로

$$a = \frac{a^3}{a^2} = \frac{2}{a^2}$$

는 유리수이다. 따라서 $2^{1/3}$이 유리수일 필요충분조건은 $2^{2/3}$이 유리수인 것이다.

무리성. 귀류법(proof by contradiction)을 쓰기 위해 a가 유리수라고 가정하자. 앞의 동치에 의해 a^2도 유리수이다. na와 na^2가 **모두** 정수인 양의 정수 n 전체의 집합을 T라 정의한다.

> **생각해 보기** 왜 그냥 $S = \{n : na$가 정수$\}$로 두고 소문항 (i)를 그대로 따라 하지 않는가?

소문항 (i)에서 $(\sqrt{2} - 1)k \in S$임을 확인할 때는 $k(\sqrt{2})^2 = 2k$가 정수이어야 했는데, 이는 자동으로 성립한다. 여기서는 $(a - 1)k$에 a를 곱하면 $ka^2 - ka$가 되는데, "ka는 정수"라는 조건 어디에도 ka^2이 정수라는 말은 없다. 그래서 그 조건을 집합 안에 넣어 두는 것이고, 바로 여기서 이 소문항의 앞부분이 필요하다.

T는 공집합이 아니다. p, q를 양의 정수로 하여 $a = \frac{p}{q}$라 쓰자. 그러면 $q^2 a = pq$와 $q^2 a^2 = p^2$은 정수이므로 $q^2 \in T$이다.

강하. k를 T의 가장 작은 원소라 하면 $u = ka$와 $v = ka^2$은 정수이다. $n = (a - 1)k$를 생각하자.

- $n = u - k$는 정수이고, $1^3 < 2$이므로 $a > 1$이어서 $n > 0$이다.
- $na = ka^2 - ka = v - u$는 정수이다.
- $a^3 = 2$를 이용하면 $na^2 = ka^3 - ka^2 = 2k - v$는 정수이다.

따라서 $n \in T$이다. 그런데 $2^3 = 8 > 2$이므로 $a < 2$이고, 따라서 $0 < a - 1 < 1$이어서 $n = (a-1)k < k$이다. 이는 k의 최소성에 모순이다. 그러므로 $2^{1/3}$은 무리수이고, 앞의 동치에 의해 $2^{2/3}$도 무리수이다.

검산

- 거의 맞는 경우에 강하를 적용해 보자. 분수 $\frac{7}{5}$는 $\sqrt{2}$에 가깝다. 5단계의 사상 $(k, m) \mapsto (m-k, 2k-m)$은 $(5,7)$을 $(2,3)$으로 보내고, $3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1 = -(7^2 - 2 \cdot 5^2)$이다. 양 $m^2 - 2k^2$은 부호만 바뀌므로, 만약 이 값이 0이라면(즉 $m = k\sqrt{2}$라면) k가 계속 작아지는 동안 이 값은 계속 0으로 남아야 하는데, 이는 불가능하다.
- 수치적으로 $\sqrt{2} - 1 \approx 0.414$이고 $2^{1/3} - 1 \approx 0.260$이며, 강하에 필요한 대로 둘 다 0과 1 사이에 엄격히 놓인다.
- 컴퓨터로 $n \le 2 \times 10^5$인 모든 n을 탐색해 보면, $2n^2$이 완전제곱수이거나 $2n^3$ 또는 $4n^3$이 완전세제곱수인 n은 하나도 없다.

흔한 실수

- $(\sqrt{2} - 1)k$가 **양수**임을 보이는 것을 잊는 실수. S는 양의 정수만 포함하므로 이것이 필요하다.
- 소문항 (ii)에서 na만으로 정의된 집합을 쓴 뒤, 근거 없이 ka^2이 정수라고 주장하는 실수.
- 가장 작은 원소 k가 왜 존재하는지 말하지 않는 실수. 이를 위해서는 S(또는 T)가 공집합이 아니어야 하며, 3단계의 요점이 바로 그것이다.

STEP 너머

이 논증은 사실 수학적 귀납법(induction)의 바탕이 되는 원리인 양의 정수의 정렬성(well-ordering)에 관한 것이며, 일반화할 수 있다. $\sqrt[r]{N}$이 정수가 아니면 무리수인데, 이는 $n\alpha, n\alpha^2, \ldots, n\alpha^{r-1}$이 모두 정수가 되는 n 전체의 집합을 잡고 그 최소 원소에 0과 1 사이에 엄격히 놓인 $\alpha - \lfloor \alpha \rfloor$를 곱해 보면 알 수 있다. 대학의 첫 대수학 강의에서 이것은 정수 전체가 **정수적으로 닫힌**(integrally closed) 환(ring)을 이룬다는 명제가 된다. 즉 정수 계수를 가

진 최고차항의 계수가 1인 다항식(monic polynomial)의 유리수 근은 반드시 정수이다. 대 븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 정수와 그 성질에 대해 더 읽어 보기에 아주 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.