풀이

STEP III 2015, 문제 4

순수수학 • 삼차방정식의 근

> **STEP III 2015, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q4

핵심 아이디어

(iii)의 세 조건은 삼각함수 퍼즐처럼 보이지만, 각각은 어떤 수의 허수부(imaginary part)이다. $z_k = r_k e^{i\theta_k}$일 때 $r_k^n \sin(n\theta_k)$는 z_k^n의 허수부이다. 따라서 이 조건들은 세 복소수의 거듭제곱 합(power sum) S_1, S_2, S_3이 실수라는 뜻이다. (ii)는 실수인 거듭제곱 합을 실수 계수 삼차식(cubic)으로 바꾸어 주고, 그러면 (i)이 실근(real root)을 하나 건네준다.

풀이

소문항 (i)

실수 x에 대하여 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$라 하자. 이것은 연속(continuous)인 실함수이다. $R = 1 + |a| + |b| + |c|$로 둔다. $x \geq R$이면 $x \geq 1$이므로 $|x| \leq x^2$이고 $1 \leq x^2$이며, 따라서 $|ax^2 + bx + c| \leq (|a| + |b| + |c|)x^2$이다. 그러므로

$$f(x) \geq x^3 - (|a| + |b| + |c|)x^2 = x^2(x - |a| - |b| - |c|) > 0.$$

같은 방법으로 $x \leq -R$이면 $f(x) \leq -|x|^2(|x| - |a| - |b| - |c|) < 0$을 얻는다. 따라서 $f(-R) < 0 < f(R)$이고, 사잇값 정리(intermediate value theorem)에 의하여 f는 $-R$과 R 사이에 영점을 가진다. 이 영점이 $(*)$의 실근이다.

(같은 말이지만, 실수 계수 다항식의 허근은 켤레(conjugate) 쌍으로 나타나며, 세 근이 모두 짝을 지을 수는 없다.)

소문항 (ii)

z_1, z_2, z_3이 근이므로

$$z^3 + az^2 + bz + c = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3),$$

이고, 계수를 비교(comparing coefficients)하면

$$a = -(z_1 + z_2 + z_3), \qquad b = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1, \qquad c = -z_1z_2z_3.$$

를 얻는다. 따라서 $a = -S_1$이다. 합을 제곱하면 $S_1^2 = S_2 + 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) = S_2 + 2b$이므로

$$a = -S_1, \qquad b = \tfrac{1}{2}(S_1^2 - S_2).$$

c를 구할 때는 S_1^3을 전개하는 대신, 각 근이 방정식을 만족한다는 사실을 이용한다. 즉 $k = 1, 2, 3$에 대하여 $z_k^3 + az_k^2 + bz_k + c = 0$이다. 이 세 식을 더하면

$$S_3 + aS_2 + bS_1 + 3c = 0.$$

a와 b를 대입하고 2를 곱하면

$$\begin{aligned} 6c &= -2S_3 + 2S_1S_2 - S_1(S_1^2 - S_2) \\ &= -S_1^3 + 3S_1S_2 - 2S_3, \end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (iii)

$k = 1, 2, 3$에 대하여 $z_k = r_k e^{i\theta_k}$로 정의한다. 드무아브르 정리(de Moivre's theorem)에 의하여 $z_k^n = r_k^n(\cos n\theta_k + i \sin n\theta_k)$이므로, 주어진 세 조건은 정확히

$$\operatorname{Im} S_1 = \operatorname{Im} S_2 = \operatorname{Im} S_3 = 0,$$

을 뜻한다. 여기서 S_1, S_2, S_3은 (ii)에서와 같이 z_1, z_2, z_3의 거듭제곱 합이다. 따라서 S_1, S_2, S_3은 모두 실수이다.

? **생각해 보기** (ii)는 삼차식에서 출발했다. 여기서 삼차식은 어디에 있는가?

직접 만든다. $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 + az^2 + bz + c$가 되도록 a, b, c를 정의하자. 그러면 z_1, z_2, z_3은 이 삼차식의 근이므로 (ii)를 적용할 수 있고,

$$a = -S_1, \qquad b = \tfrac{1}{2}(S_1^2 - S_2), \qquad c = \tfrac{1}{6}(-S_1^3 + 3S_1S_2 - 2S_3),$$

를 얻으며, 이들은 모두 실수이다. (i)에 의하여 이 삼차식은 실근을 가지는데, 그 근은 z_1, z_2, z_3뿐이므로 어떤 z_k는 실수이다. 그런데 $r_k > 0$인 $z_k = r_k e^{i\theta_k}$가 실수이려면 $\sin\theta_k = 0$,

즉 θ_k가 π의 배수여야 한다. $-\pi < \theta_k < \pi$에서 그런 값은 $\theta_k = 0$뿐이다. 따라서 적어도 하나의 k에 대하여 $\theta_k = 0$이다.

이제 $\theta_1 = 0$이라 하자. 그러면 $z_1 = r_1$은 0이 아닌 실수이다. 그러면

$$z_2 + z_3 = S_1 - z_1 \quad \text{그리고} \quad z_2 z_3 = \frac{-c}{z_1}$$

는 모두 실수이다. 따라서 z_2와 z_3은 실수 계수 이차방정식(quadratic) $z^2 - (z_2 + z_3)z + z_2 z_3 = 0$의 근이다. 두 가지 경우가 있다.

- 근이 허수이면, 두 근은 서로 켤레복소수이다. 즉 $z_3 = \overline{z_2} = r_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}$이다. $-\theta_2$도 $(-\pi, \pi)$에 속하고 이 구간에서 편각(argument)은 유일하므로 $\theta_3 = -\theta_2$이다(그리고 $r_3 = r_2$이다).
- 근이 실수이면, 앞에서와 똑같이(각 근의 절댓값(modulus)은 양수이고 편각은 $(-\pi, \pi)$에 속하므로) $\theta_2 = \theta_3 = 0$을 얻고, 따라서 이 경우에도 $\theta_2 = -\theta_3$이다.

어느 경우든 $\theta_2 = -\theta_3$이므로 증명이 끝난다.

검산

- 근이 1, 2, 3일 때의 (ii): $S_1 = 6$, $S_2 = 14$, $S_3 = 36$이고, $-216 + 252 - 72 = -36 = 6c$에서 $c = -6$이다. 이는 $(z-1)(z-2)(z-3)$에 대하여 기대한 값과 같다.
- (iii)의 역방향: $\theta_1 = 0$, $\theta_3 = -\theta_2$, $r_3 = r_2$이면 각 합에서 둘째 항과 셋째 항이 상쇄되고 첫째 항은 0이므로 세 조건이 모두 성립한다. 수천 개의 무작위 시작점에서 세 조건을 수치적으로 푸는 컴퓨터 탐색에서도, 한 각이 0이고 나머지 두 각이 서로 반대인 해만 발견되었다.

흔한 실수

- (i)에서 "삼차식은 항상 축과 만난다"고만 쓰고 근거를 대지 않는 것. $|x|$가 클 때 부호가 바뀐다는 것은 한 줄의 논증이 필요하다.
- (iii)에서 $\theta_k = \pm\pi$여도 z_k가 실수가 된다는 점을 잊는 것. 이 경우를 배제하는 것은 개구간(open interval) $(-\pi, \pi)$이다.
- 켤레인 경우만으로 $\theta_2 = -\theta_3$을 결론짓고, z_2, z_3이 모두 실수인 경우를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

다항식의 계수는 그 근의 기본 대칭함수(elementary symmetric functions)이며, (ii)의 항등식들은 이들을 거듭제곱 합과 연결하는 뉴턴(Newton) 항등식(Newton's identities)의 처음 몇 개이다. 대수학 입문 과정에서는 근에 대한 모든 대칭 다항식(symmetric polynomial)이 기본 대칭함수의 다항식으로 나타난다는 것을 배우는데, 이것이 갈루아(Galois) 이론(Galois theory)의 출발점이다. 이에 관해서는 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 읽어 보면 좋다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.