풀이

# STEP III 2015, 문제 3

순수수학 • 극곡선과 넓이

> **STEP III 2015, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q3

## 핵심 아이디어

$r\cos\theta = x$이므로 곡선 $r = a\sec\theta$는 바로 직선 $x = a$이다. 따라서 $r - a\sec\theta$는 원점에서 각 $\theta$ 방향으로 뻗은 반직선(ray)을 따라 잰, 한 점과 그 반직선이 이 직선과 만나는 점 사이의 거리이고, 주어진 방정식은 이 거리가 $b$라는 뜻이다. 이것은 극(pole)을 고정점으로 하는 콘코이드(conchoid)의 정의와 정확히 같다. 그래프를 그리려면 절댓값(modulus)을 풀어 $r = a\sec\theta + b$와 $r = a\sec\theta - b$로 나누고, 각각에 대해 어떤 $\theta$ 값에서 $r \geq 0$이 되는지 따져 본다.

## 풀이

풀이 전체에서 $\sec\theta$는 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$에서 정의되지 않으므로 이 각은 제외한다. 절댓값을 풀면 $(*)$는

$$r = a\sec\theta + b \qquad \text{또는} \qquad r = a\sec\theta - b,$$

를 뜻하고, 어느 경우든 $r \geq 0$이어야 한다.

### 소문항 (i)

$\sec\theta > 0$**인 이유.** $\sec\theta < 0$이라고 가정하자. 그러면 $|\cos\theta| \leq 1$에서 $\sec\theta \leq -1$이므로 $a\sec\theta \leq -a$이다. 이때 $a > b$를 이용하면 가능한 두 $r$ 값은 모두

$$r = a\sec\theta \pm b \leq -a + b < 0,$$

을 만족한다. 이것은 $r \geq 0$에 모순이므로, $(*)$를 만족하는 모든 점에서 $\sec\theta > 0$, 즉 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$이다.

**콘코이드.** $A$를 극 $O$로, $L$을 직선 $x = a$(극좌표로는 $r\cos\theta = a$, 즉 $r = a\sec\theta$)로, $d = b$로 잡는다. $a > 0$이므로 $A$는 $L$ 위에 있지 않다.

점 $P$가 $(*)$를 만족하고 그 편각이 $\theta$라 하면 $\cos\theta > 0$이다. 직선 $OP$는 $L$과 평행하지 않으며, 같은 반직선 위에서 $OQ = a\sec\theta$인 점 $Q$, 즉 직교좌표(Cartesian coordinates)로 $Q = (a, a\tan\theta)$에서 $L$과 만난다. $O$, $Q$, $P$는 모두 $O$에서 나오는 한 반직선 위에 있고 $O$로부터의 거리가 각각 $a\sec\theta$와 $r$이므로

$$PQ = |r - a\sec\theta| = b.$$

이다. 따라서 $P$는 $A = O$를 지나는 직선을 따라 잰 $L$까지의 거리가 $b$인 점이다. 즉 $P$는 이 $L$, $A$와 $d = b$로 정해지는 니코메데스(Nicomedes)의 콘코이드 위에 있다.

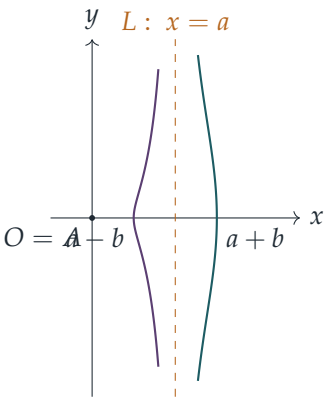
(역으로, 그 콘코이드 위의 모든 점은 $(*)$를 만족한다. $O$를 지나 $L$과 $Q$에서 만나는 임의의 직선 위에서 $Q$로부터 거리가 $b$인 두 점은 반직선 $OQ$를 따라 $O$로부터 거리 $a\sec\theta \pm b$에 있으며, $a\sec\theta \geq a > b$이므로 둘 다 양수이다. 따라서 자취(locus)는 콘코이드 전체이다.)

**그래프.** 직교좌표로 $x = r\cos\theta = a \pm b\cos\theta$, $y = r\sin\theta$이다. $r - a\sec\theta = \pm b$에 $\cos\theta$를 곱하면 $x - a = \pm b\cos\theta = \pm bx/r$이므로 곡선은

$$(x - a)^2(x^2 + y^2) = b^2x^2.$$

이다. 가지(branch)는 두 개이며, 둘 다 $x$축에 대하여 대칭이고($\theta$를 $-\theta$로 바꾸면 된다), $r \to \infty$가 되는 $\theta \to \pm\frac{\pi}{2}$에서 둘 다 $L$을 점근선(asymptote)으로 가진다.

- 바깥 가지 $r = a\sec\theta + b$는 $x = a + b\cos\theta \in (a, a + b]$이고, $(a + b, 0)$에서 축과 만난다.
- 안쪽 가지 $r = a\sec\theta - b$는 $x = a - b\cos\theta \in [a - b, a)$이고, $O$의 오른쪽에 있는 $(a - b, 0)$에서 축과 만난다.




(그림은 $a = 2$, $b = 1$인 경우이다. 바깥 가지는 청록색, 안쪽 가지는 자주색이다.)

### 소문항 (ii)

이제 $a < b$이다. 두 경우를 다시 살피면서 $r \geq 0$이 되는 곳을 확인한다.

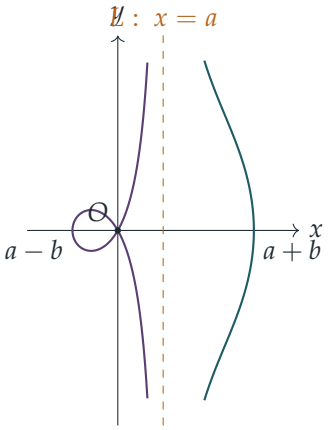
- $r = a\sec\theta + b$. $\sec\theta > 0$이면 이 값은 항상 양수이고, 앞에서와 같이 $L$의 오른쪽에 있는 바깥 가지가 된다. $\sec\theta < 0$이면 $r \geq 0$일 필요충분조건은 $-a\sec\theta \leq b$, 즉 $|\sec\theta| \leq b/a$, 즉 $\cos\theta \leq -a/b$이다.
- $r = a\sec\theta - b$. $\sec\theta < 0$이면 이 값은 음수이므로 점이 없다. $\sec\theta > 0$이면 $r \geq 0$일 필요충분조건은 $\sec\theta \geq b/a$, 즉 $0 < \cos\theta \leq a/b$이다.

$\alpha = \arccos(a/b)$라 하자. $0 < a/b < 1$이므로 $\alpha$는 $(0, \frac{\pi}{2})$에 속한다.

> **생각해 보기** $\sec\theta < 0$인 부분은 어떤 모양일까?

이 부분은 $\cos\theta \leq -a/b$, 즉 $\pi - \alpha \leq |\theta| \leq \pi$에서의 $r = b + a\sec\theta$이다. 양 끝에서는 $\cos\theta = -a/b$이므로 $r = b - b = 0$이 되어, 이 부분은 원점에서 시작하여 원점에서 끝난다. $\theta = \pi$에서는 $r = b - a$이고, 이는 음의 $x$축 위의 점 $(a - b, 0)$이다. 그 사이에서는 $r > 0$이고 곡선은 $x$축에 대하여 대칭이므로, 이 부분은 원점 왼쪽에 놓인 닫힌 고리이며 ($x = a + b\cos\theta$이므로) $a - b \leq x \leq 0$ 범위에 있다.

안쪽 가지 $r = a\sec\theta - b(\alpha \leq |\theta| < \frac{\pi}{2})$ 역시 원점($\cos\theta = a/b$인 곳)에서 시작하여 $|\theta| \to \frac{\pi}{2}$일 때 점근선 $L$을 향해 뻗어 나가며, $0 \leq x < a$ 범위에 머문다. 따라서 안쪽 가지와 고리는 함께 $O$에서 자기 자신과 교차하는 하나의 곡선을 이루고, 그 점에서의 접선 방향은 $\theta = \pm\alpha$이다.




(그림은 $a = 1, b = 2$인 경우이므로 $\alpha = \frac{\pi}{3}$이다. 바깥 가지는 청록색이고, 안쪽 가지와 고리는 함께 자주색이다.)

**$a = 1, b = 2$일 때 고리의 넓이.** 이때 $\cos\theta \leq -\frac{1}{2}$는 $\frac{2\pi}{3} \leq |\theta| \leq \pi$를 뜻하고, 고리 위에서 $r = 2 + \sec\theta$이다. $\theta$가 이 범위를 지나는 동안 반직선은 고리를 정확히 한 번 훑으므로 넓이

는 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$이다. $x$축에 대한 대칭성을 이용하여 위쪽 절반 $\frac{2\pi}{3} \le \theta \le \pi$의 두 배를 구한다.

$$\begin{aligned}\text{넓이} &= 2\cdot\frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{\pi}(2+\sec\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \int_{2\pi/3}^{\pi}\left(4+4\sec\theta+\sec^2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \Big[4\theta+4\ln|\sec\theta+\tan\theta|+\tan\theta\Big]_{2\pi/3}^{\pi}.\end{aligned}$$

적분 구간이 $\frac{\pi}{2}$를 포함하지 않으므로 주어진 $\sec\theta$의 부정적분(antiderivative)을 여기서 쓸 수 있다. $\theta=\pi$에서는 $\sec\theta=-1$, $\tan\theta=0$이므로 괄호 안의 값은 $4\pi+4\ln 1+0=4\pi$이다. $\theta=\frac{2\pi}{3}$에서는 $\sec\theta=-2$, $\tan\theta=-\sqrt{3}$이므로 괄호 안의 값은 $\frac{8\pi}{3}+4\ln(2+\sqrt{3})-\sqrt{3}$이다. 빼면

$$\text{고리의 넓이} = \frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}-4\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

이다.

## 검산

- 넓이의 수치는 $4.1888+1.7321-5.2678\approx 0.6530$이다. 당연히 양수이고, 고리가 들어가는 직사각형 $-1\le x\le 0$, $|y|\le 0.45$(넓이 0.9)에 비해 작다. $\frac{1}{2}(2+\sec\theta)^2$을 $[\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$에서 직접 수치적분해도 0.65301을 얻는다.
- 고리는 $O$와 $(-1,0)$을 지난다. $\theta=\frac{2\pi}{3}$에서 $r=2-2=0$이고, $\theta=\pi$에서 $r=2-1=1$이다.
- (i)의 곡선 위의 한 점, 예를 들어 $a=2$, $b=1$, $\theta=\frac{\pi}{4}$를 택하자. 그러면 $r=2\sqrt{2}+1$이고, 반직선은 $O$로부터 거리 $2\sqrt{2}$인 $(2,2)$에서 $L$과 만나므로, 이 점은 그보다 $1=b$만큼 더 나아간 곳에 있다.

## 흔한 실수

- 조건 $r\ge 0$을 잊는 것. 이 조건이 바로 (i)에서 $\sec\theta>0$을 강제하고, (ii)에서 고리에 대한 $\theta$의 범위를 정한다.
- $\theta=\frac{2\pi}{3}$에서 $r=0$이 되는 곳부터 시작하지 않고, 점근선 방향을 지나는 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 고리를 적분하는 것.
- $\sec\theta$와 $\tan\theta$가 모두 음수인 제2사분면에서 $\ln|\sec\theta+\tan\theta|$의 부호를 틀리는 것.

## STEP 너머

콘코이드는 기원전 200년경 니코메데스가 각의 삼등분(angle trisection)과 세제곱근 구하기를 위해 고안했는데, 이 문제들은 눈금 없는 자와 컴퍼스만으로는 불가능하다. 그 불가

능성의 증명은 체론(field theory)에서 나오며, 대학 첫 대수학 강의에서 배운다(Allenby, *Rings, Fields and Groups* 참고). (ii)에서 원점의 자기 교차는 **마디점**(node)으로, 대수곡선(algebraic curve), 여기서는 사차곡선(quartic) $(x-a)^2(x^2+y^2) = b^2x^2$ 위의 특이점(singular point)의 한 예이다. STEP 스타일의 곡선 그리기 문제를 더 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.