풀이

STEP III 2015, 문제 2

순수수학 • 해석학

> **STEP III 2015, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q2

이 문제는 *Beyond STEP*의 2.1 절 "**결국**"이란 무슨 뜻인가에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/eventually.html

핵심 아이디어

관계 $(s_n) \leq (t_n)$은 "언젠가부터(eventually) $s_n \leq t_n$이다"라는 뜻이다. 즉 앞쪽의 유한 개 항은 무시해도 된다. 따라서 참인 명제를 증명하려면 그 뒤로는 부등식(inequality)이 반드시 성립하는 지점 m을 명시해야 하고, 거짓인 명제를 보이려면 가능한 모든 m의 선택을 무너뜨리는 두 수열(sequence)을 찾아야 한다. 늘 **어떤 n부터** 이것이 성립하는지를 물어야 한다.

풀이

소문항 (i)

참. 양의 정수 n에 대해서는 $n > 0$으로 나눌 수 있으므로

$$1000n \leq n^2 \iff 1000 \leq n.$$

따라서 $n \geq 1000$이면 언제나 $1000n \leq n^2$이고, $m = 1000$이 조건을 만족한다. ($1000 \cdot 999 > 999^2$이므로 이보다 작은 m은 조건을 만족하지 않는다.)

소문항 (ii)

거짓. 함정은 "언젠가부터 $s_n \leq t_n$인 것은 아니다"라는 사실이 $s_n > t_n$인 경우가 **무한히 많다**는 것만 알려 줄 뿐, **언젠가부터** 그렇다는 것을 알려 주지는 않는다는 점이다. 두 수열은

서로 계속 앞서거니 뒤서거니 할 수 있다. 다음과 같이 잡자.

$$s_n = 2 + (-1)^n, \qquad t_n = 2,$$

그러면 s_n은 $1, 3, 1, 3, \ldots$으로 진행하고, 두 수열의 모든 항은 양수이다.

- $(s_n) \leq (t_n)$은 성립하지 않는다. 어떤 양의 정수 m을 제시하더라도 $n \geq m$인 짝수 n이 존재하고, 그 n에 대해 $s_n = 3 > 2 = t_n$이다.
- $(t_n) \leq (s_n)$도 성립하지 않는다. 어떤 m을 제시하더라도 $n \geq m$인 홀수 n이 존재하고, 그 n에 대해 $t_n = 2 > 1 = s_n$이다.

따라서 명제의 가정은 성립하지만 결론은 성립하지 않는다.

소문항 (iii)

참. 가정에 의해 모든 $n \geq m_1$에 대해 $s_n \leq t_n$인 양의 정수 m_1이 존재하고, 모든 $n \geq m_2$에 대해 $t_n \leq u_n$인 양의 정수 m_2가 존재한다. 다음과 같이 놓자.

$$m = \max(m_1, m_2).$$

$n \geq m$이면 $n \geq m_1$이고 $n \geq m_2$이므로, 두 부등식이 모두 n에서 성립하여

$$s_n \leq t_n \leq u_n.$$

이다. 따라서 $n \geq m$이면 언제나 $s_n \leq u_n$이고, 이것이 곧 $(s_n) \leq (u_n)$이다.

> ? **생각해 보기** 왜 단순히 $m = m_1$이나 $m = m_1 + m_2$로 잡지 않는가?

$m = m_1$로 잡으면 실패한다. $m_1 \leq n < m_2$인 경우에는 t_n과 u_n의 대소에 대해 아무것도 알 수 없기 때문이다. n이 두 기준점을 동시에 넘어야 하며, $\max(m_1, m_2)$는 이를 보장하는 가장 작은 선택이다. ($m_1 + m_2$도 성립하지만 낭비가 있다.)

소문항 (iv)

참이며, $m = 4$이다. 간단한 표를 보면 어디서 시작해야 할지 알 수 있다.

n	1	2	3	4	5	6
n^2	1	4	9	16	25	36
2^n	2	4	8	16	32	64

부등식은 $n = 1, 2$에서 성립하고, $n = 3$에서 성립하지 않으며, $n = 4$부터 다시 성립한다. 따라서 $m = 4$가 가능한 가장 작은 선택이며, 모든 $n \geq 4$에 대해 $n^2 \leq 2^n$임을 수학적 귀납법(induction)으로 증명한다.

기저 단계(*base case*). $n = 4$일 때 $n^2 = 16 = 2^4$이다.

귀납 단계(*inductive step*). $n \geq 4$이고 $n^2 \leq 2^n$이라고 가정하자. $n \geq 3$이므로 $n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 \geq 2 > 0$이고, 따라서 $2n + 1 < n^2$이다. 그러므로

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\ &< n^2 + n^2 && \text{다음 부등식에 의해: } 2n+1 < n^2 \\ &= 2n^2 \\ &\leq 2 \cdot 2^n && \text{귀납 가정(inductive hypothesis)에 의해} \\ &= 2^{n+1}.\end{aligned}$$

따라서 n에 대한 결과가 $n+1$에 대한 결과를 함의하고, 수학적 귀납법에 의해 모든 $n \geq 4$에 대해 $n^2 \leq 2^n$이다. 그러므로 $m = 4$로 $(n^2) \leq (2^n)$이 성립한다.

? 생각해 보기 귀납법의 정확히 어느 부분에서 n이 커야 했는가?

$2n + 1 < n^2$을 쓰는 단계에서만 필요하며, 이 부등식은 $n \geq 3$을 요구한다. 이 때문에 귀납법을 $n = 1$부터 시작할 수 없다. $n = 2$에서 $n = 3$으로 넘어가는 단계는 $5 < 4$를 사용하는데 이는 거짓이고, 실제로 $3^2 > 2^3$이다.

검산

- 소문항 (i): $n = 1000$에서 양변은 모두 10^6이고, $n = 999$에서는 $999\,000 > 998\,001$이다.
- 소문항 (iv): 4부터 2000까지의 모든 n에 대해 컴퓨터로 $n^2 \leq 2^n$을 확인하면 성립함을 알 수 있고, 위의 표는 $n = 3$에서 성립하지 않음을 확인해 준다. 2^n이 얼마나 빨리 앞서는지 감을 잡아 보면, $20^2 = 400$이지만 $2^{20} = 1\,048\,576$이다.
- 소문항 (ii): 어떤 m을 시도하든 (한 방향의 순서에 대해서는) 그다음 짝수 n에 의해, (다른 방향에 대해서는) 그다음 홀수 n에 의해 무너진다.

흔한 실수

- "언젠가부터 $\leq$인 것은 아니다"를 "언젠가부터 $>$이다"로 취급하는 것. "어떤 m이 존재하여 모든 $n \geq m$에 대해..."의 부정(negation)은 "모든 m에 대해 $s_n > t_n$인 어떤 $n \geq m$이 존재한다"이다.
- (iv)에서 귀납법을 $n = 1$이나 $n = 2$에서 시작하는 것. 그곳에서는 귀납 단계가 실제로 성립하지 않는다.
- (iii)에서 두 가정에 같은 문자 m을 사용하여, 마치 두 기준점이 일치해야 하는 것처럼 다

루는 것.

STEP 너머

여기서의 관계는 실해석학(real analysis) 전체를 관통하는 "언젠가부터"라는 한정기호(quantifier)이다. 수열이 수렴(converge)한다는 것은 임의의 허용 오차에 대해 수열이 **언젠가부터** 극한값과 그 오차 이내에 있다는 뜻이다. 소문항 (ii)는 실수의 순서와 달리 이 수열의 순서가 전순서(total order)가 아님을 보여 준다. 즉 두 수열이 아예 비교 불가능할 수도 있다. 컴퓨터 과학자들은 같은 아이디어를 빅오 표기법(big-O notation)에 사용하며, 거기서 (iv)는 지수함수(exponential)가 결국 다항식(polynomial)을 앞선다는 익숙한 사실이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이러한 한정기호 논증이 체계적으로 정리되는 모습을 친절하게 보여 주는 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.