풀이

STEP III 2015, 문제 12

확률과 통계 • 확률생성함수

> **STEP III 2015, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q12

핵심 아이디어

m으로 나눈 나머지(remainder)는 지수를 m으로 나눈 나머지에만 관계하므로, 나머지의 생성함수(generating function)에서는 x^m이 나타날 때마다 이를 1로 바꾸어도 된다. 서로 독립(independent)인 던지기 결과를 더하면 생성함수가 곱해지고, 그다음 다시 x의 거듭제곱을 줄인다. 이 규칙을 쓰면 계산 전체가 $x \cdot y$와 y^2이 y의 배수로 줄어드는 간단한 다항식 계산이 된다.

풀이

전체에 걸쳐 $X_1, X_2, \ldots$를 각 던지기의 결과라 하자. 이들은 서로 독립이고 각각 $\{1, \ldots, 6\}$ 위의 균등분포(uniform distribution)를 따른다.

축소 규칙. m을 양의 정수라 하자. U와 V가 서로 독립이고 $\{0, 1, \ldots, m-1\}$의 값을 가지면, $U+V$의 확률생성함수(pgf, probability generating function)는 $G_U(x)G_V(x)$이며, 이는 x^k항이 $U+V=k$일 확률을 계수로 갖는 다항식이다. $U+V$를 m으로 나눈 나머지가 j인 것은 정확히 $U+V$가 j 또는 $j+m$일 때이다. 따라서 $k \geq m$인 모든 x^k를 x^{k-m}으로 바꾸면, 즉 $x^m = 1$로 두면 그 나머지의 확률생성함수를 얻는다. S_n의 나머지는 (S_{n-1}의 나머지) + (X_n의 나머지)의 나머지이고 이 둘은 서로 독립이므로, 각 나머지의 확률생성함수는 바로 앞의 것에 곱한 다음 $x^m = 1$로 두어 얻는다. "$x^m = 1$을 사용하면 같다"는 뜻으로 $\equiv$를 쓴다.

소문항 (i)

$1, \ldots, 5$가 나오면 나머지는 $1, \ldots, 5$이고, 6이 나오면 나머지는 0이다. 각각의 확률은 $\frac{1}{6}$이므로

$$\mathrm{G}(x) = \tfrac{1}{6}\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right) = \tfrac{1}{6}z, \qquad \text{여기서} z = 1 + x + \cdots + x^5.$$

$x^6 = 1$이면 z에 x를 곱하는 것은 각 항을 한 자리씩 돌리는 것일 뿐이다: $xz = x + x^2 + \cdots + x^5 + x^6 \equiv z$. 따라서 모든 k에 대하여 $x^k z \equiv z$이고

$$z^2 = \sum_{k=0}^{5} x^k z \equiv 6z.$$

그러므로 R_2의 확률생성함수는

$$\tfrac{1}{36}z^2 \equiv \tfrac{1}{36} \cdot 6z = \tfrac{1}{6}z = \mathrm{G}(x),$$

이고, 이것이 보이려던 것이다.

같은 단계가 모든 단계에서 그대로 성립한다. R_{n-1}의 확률생성함수가 $\mathrm{G}(x)$이면 R_n의 확률생성함수는 $\mathrm{G}(x)^2 \equiv \mathrm{G}(x)$이다. 수학적 귀납법(induction)에 의하여 모든 R_n의 확률생성함수는 $\mathrm{G}(x) = \frac{1}{6}z$이다. $6 \mid S_n$일 확률은 $\mathrm{P}(R_n = 0)$, 즉 $\mathrm{G}(x)$의 상수항이므로

$$\mathrm{P}(S_n \text{ 이 다음의 배수: } 6) = \tfrac{1}{6}.$$

소문항 (ii)

이제 $m = 5$이다. $1, 2, 3, 4$가 나오면 나머지는 $1, 2, 3, 4$이고, 5가 나오면 0, 6이 나오면 1이다. 따라서 나머지 1의 확률은 $\frac{2}{6}$이고 나머지 값들은 각각 $\frac{1}{6}$이다:

$$\mathrm{G}_1(x) = \tfrac{1}{6}\left(1 + 2x + x^2 + x^3 + x^4\right) = \tfrac{1}{6}(x + y), \qquad y = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4.$$

소문항 (i)과 똑같이, $x^5 = 1$이면 $xy \equiv y$이므로 모든 k에 대하여 $x^k y \equiv y$이고

$$y^2 = \sum_{k=0}^{4} x^k y \equiv 5y.$$

그러므로

$$\begin{aligned}\mathrm{G}_2(x) &\equiv \tfrac{1}{36}(x + y)^2 = \tfrac{1}{36}\left(x^2 + 2xy + y^2\right) \\ &\equiv \tfrac{1}{36}\left(x^2 + 2y + 5y\right) = \tfrac{1}{36}\left(x^2 + 7y\right),\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하는 결과이다. (확인 삼아 $x = 1$을 대입하면 $\frac{1}{36}(1 + 35) = 1$이다.)

일반적인 확률생성함수. 축소 규칙에 의하여 $G_n(x) \equiv G_1(x)^n = \frac{1}{6^n}(x+y)^n$이다. 이항정리(binomial theorem)로 전개하면

$$(x+y)^n = x^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

$k \geq 1$이면 $y^k \equiv 5^{k-1}y$($y^2 \equiv 5y$에 대한 귀납법)와 $x^{n-k}y \equiv y$를 차례로 사용하여

$$x^{n-k}y^k \equiv 5^{k-1}y.$$

따라서

$$(x+y)^n \equiv x^n + y\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^{k-1} = x^n + \frac{y}{5}\left[(1+5)^n - 1\right] = x^n + \frac{6^n-1}{5}y.$$

? **생각해 보기** $(6^n-1)/5$는 어디서 나왔는가?

이항정리에 의하여 합 $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^k$는 $(1+5)^n = 6^n$이다. 여기서는 $k=0$인 항(1)이 빠져 있고 $\frac{1}{5}$이라는 인수가 더 붙어 있다. 그러므로

$$G_n(x) = \frac{1}{6^n}\left(x^r + \frac{6^n-1}{5}y\right),$$

이고, 여기서 r은 n을 5로 나눈 나머지이다($x^n \equiv x^r$이므로). 따라서 모든 나머지의 확률은 $\frac{6^n-1}{5\cdot 6^n}$이고, 나머지 r만 $\frac{1}{6^n}$을 더 갖는다.

5로 나누어떨어질 확률. 구해야 할 것은 $P(T_n = 0)$, 즉 $G_n(x)$의 상수항이다. y의 상수항은 1이다.

- $5 \nmid n$이면 $r \neq 0$이므로 x^r은 상수항에 아무것도 더하지 않는다. 따라서

  $$P(S_n \text{ 이 다음의 배수: } 5) = \frac{6^n-1}{5\cdot 6^n} = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{6^n}\right),$$

  이고, 이것이 보이려던 것이다.

- $5 \mid n$이면 $r = 0$이므로 $x^r = 1$이 $\frac{1}{6^n}$을 더한다:

  $$P(S_n \text{ 이 다음의 배수: } 5) = \frac{6^n-1}{5\cdot 6^n} + \frac{1}{6^n} = \frac{6^n+4}{5\cdot 6^n} = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{4}{6^n}\right).$$

검산

- $n=1$: 공식은 $\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6} = \frac{1}{6}$을 준다. 실제로 5로 나누어떨어지는 것은 5가 나오는 경우뿐이다.

- $n = 2$: 공식은 $\frac{1}{5} \cdot \frac{35}{36} = \frac{7}{36}$을 준다. 직접 세어 보면 합이 5인 경우(네 가지)와 10인 경우(세 가지)로 $\frac{7}{36}$이며, 이는 $\frac{1}{36}(x^2 + 7y)$의 상수항과 일치한다.
- $n = 5$: 답은 $\frac{6^5+4}{5 \cdot 6^5} = \frac{389}{1944} \approx 0.2001$로, $\frac{1}{5}$보다 조금 크다. $n \leq 8$에 대하여 컴퓨터로 6^n가지 결과를 모두 열거해 보면 확률생성함수 $G_n(x)$ 전체와 두 경우 모두가 확인된다.
- $n \to \infty$이면 두 답 모두 $\frac{1}{5}$로 수렴한다. 즉 나머지가 균등분포가 된다.

흔한 실수

- 6을 5로 나눈 나머지가 1이어서 G_1에서 x의 계수가 $\frac{2}{6}$이라는 것을 잊는 실수.
- 모든 n에 대하여 x^n을 x^0으로 줄이는 실수: x^n항은 n의 나머지 r에 대한 x^r로 줄어들며, 바로 이 때문에 $5 \mid n$인 경우가 다르다.
- $G_n(x) = G_1(x)^n$을 "="로 쓴 다음 $x^5 = 1$로 줄이지 않고 계수를 읽는 실수.

STEP 너머

$x^m = 1$로 두는 것은 $x^m - 1$을 법으로 하는 다항식환(ring), 즉 위수가 m인 순환군(cyclic group)의 군대수(group algebra)에서 계산하는 것과 같다. 이와 동등한 도구로 단위근 필터(roots-of-unity filter)가 있다: $P(m \mid S_n) = \frac{1}{m} \sum_{\omega^m=1} G_S(\omega)$이며, 이는 이산 푸리에 변환(discrete Fourier transform)이 작동하는 모습이다. 이 관점은 또한 순환 위에서 무작위 걸음을 더해 가면 왜 균등분포가 되는지도 설명해 주며, 이것이 마르코프 연쇄(Markov chain)와 군 위의 무작위 행보(random walk) 이론의 출발점이다. Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 생성함수와 무작위 행보를 알맞은 수준에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.