풀이

STEP III 2015, 문제 11

역학 • 원운동

> **STEP III 2015, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q11

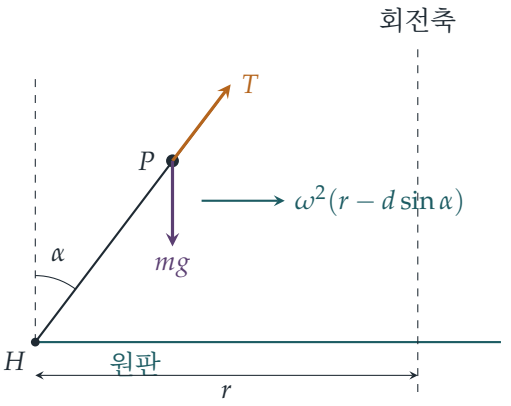
핵심 아이디어

가벼운 막대(light rod)는 질량이 없으므로, 막대가 움직이고 있더라도 막대에 작용하는 힘과 모멘트(moment)는 정확히 평형을 이루어야 한다. 소문항 (i)에서는 막대에 두 힘만 작용하고, 경첩(hinge)에서 오는 힘은 경첩에 대한 모멘트가 없으므로 P에서 오는 힘은 경첩을 똑바로 향해야 한다. 그다음에는 P가 수평면 위에서 원운동을 하는 입자이므로, 힘을 성분으로 분해(resolving)하면 나머지가 해결된다. 소문항 (ii)에서는 두 입자에서 오는 힘이 막대 방향일 필요가 없지만, 경첩에 대한 모멘트를 취하면 여전히 β에 대한 하나의 방정식을 얻는다.

풀이

모형. 입자는 질점(point mass)이고, 막대는 가볍고 강체이며, 경첩은 매끄러우므로 경첩은 자신의 축(막대를 포함하는 연직 평면에 수직이고 경첩을 지나는 수평선)에 대하여 짝힘(couple)을 작용하지 않는다. 그 평면에 좌표축을 잡되, 원점은 경첩 H에 두고, x축은 수평으로 회전축을 향하게, y축은 연직 위쪽을 향하게 한다. H에서 거리 s인 막대 위의 점은 $(s\sin\theta,\ s\cos\theta)$에 있다. 여기서 θ는 막대가 위쪽 연직선과 이루는 각이며, 이 점은 회전축에서 수평 거리 $r - s\sin\theta$만큼 떨어져 있다.

소문항 (i)



위 그림에 P에 작용하는 힘을 나타내었다. 하나는 무게이고, 다른 하나는 막대에서 오는 힘인데, 이 힘이 막대 방향으로 작용함을 곧 보일 것이다. 청록색 화살표는 P의 가속도이다.

P에서 오는 힘은 막대 방향이다. 막대에는 두 힘만 작용한다. 하나는 H에 작용하는 경첩의 힘이고, 다른 하나는 P에 작용하는, P에서 오는 힘 $\mathbf{G}$이다. 막대는 가벼우므로, 막대가 어떻게 움직이든 경첩 축에 대한 막대의 전체 모멘트는 0이다(질량 곱하기 각가속도가 0이기 때문이다). 경첩의 힘은 H에 대한 모멘트가 없으므로, $\mathbf{G}$도 모멘트가 없다.

다음으로, P는 회전축을 중심으로 하는 수평 원 위를 움직이므로, 그 가속도는 수평이고 회전축을 향하며, 회전축은 막대를 포함하는 연직 평면 안에 있다. 무게 역시 그 평면 안에 있으므로, 막대가 P에 작용하는 힘도, 따라서 (뉴턴(Newton)의 제3법칙에 의해 크기가 같고 방향이 반대인) $\mathbf{G}$도 그 평면 안에 있다. 평면 안의 힘이 H에 대한 모멘트가 0이면 그 작용선은 H를 지난다. 그 작용선은 막대 위에 있는 P도 지나므로, $\mathbf{G}$는 막대와 평행하다. 이로써 증명되었다.

각. 따라서 막대는 막대 방향으로 크기 T인 힘으로 P를 밀거나 당긴다. 이 힘은 H에서 P를 향하는 방향으로 잡는다. 즉 성분은 $(T\sin\alpha,\ T\cos\alpha)$이다. P는 회전축에서 거리 $r - d\sin\alpha$만큼 떨어져 있는데, $d\sin\alpha < r$이므로 이 값은 양수이다. 따라서 P는 회전축에 대해 H와 같은 쪽에 있고, 그 가속도 $\omega^2(r - d\sin\alpha)$는 $+x$ 방향을 향한다. P에 대한 뉴턴의 제2법칙은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\text{연직 방향:} \quad T\cos\alpha - mg = 0, \\ &\text{수평 방향:} \quad T\sin\alpha = m\omega^2(r - d\sin\alpha). \end{aligned}$$

둘째 식을 첫째 식으로 나누면($\cos\alpha \neq 0$이다. 그렇지 않으면 $T\cos\alpha = 0 \neq mg$이기 때문이다)

$$\tan\alpha = \frac{\omega^2(r - d\sin\alpha)}{g} = \frac{r - d\sin\alpha}{a}.$$

양변에 $a\cot\alpha$를 곱하면 $a = r\cot\alpha - d\cos\alpha$, 즉

$$r\cot\alpha = a + d\cos\alpha,$$

이므로 증명되었다.

경첩의 힘. 첫째 식에서 $T = mg/\cos\alpha > 0$이므로, 막대는 P를 경첩에서 멀어지는 쪽으로 민다. 즉 막대는 압축(compression) 상태에 있다. 뉴턴의 제3법칙에 의해 P는 막대 방향으로 H를 향해 크기 T인 힘으로 막대를 민다. 막대는 가벼우므로 막대에 작용하는 힘의 합은 0이고, 따라서 경첩이 막대에 작용하는 힘은 이 힘과 크기가 같고 방향이 반대이다. 즉 경첩의 힘은 **막대 방향으로, 경첩에서 멀어져 P를 향하여** (위쪽으로, 그리고 회전축을 향해 안쪽으로) 작용하며, 그 크기는

$$\frac{mg}{\cos\alpha} = mg\sec\alpha.$$

이다.

소문항 (ii)

이제 질량 m_i $(i = 1, 2)$인 입자는 $(d_i\sin\beta,\ d_i\cos\beta)$에 있고, 회전축에서 거리 $r - d_i\sin\beta > 0$만큼 떨어져 있다.

> **생각해 보기** 이제 각 입자는 우리가 모르는 어떤 방향으로 막대를 당긴다. 이 힘들을 하나하나 구하지 않으려면 어떻게 해야 할까?

이 힘들을 하나하나 구할 필요는 없다. 각 입자에 대한 뉴턴의 제2법칙으로 막대가 그 입자에 작용하는 힘을 구하고, 가벼운 막대의 H에 대한 모멘트 방정식을 쓰면 미지의 경첩 힘이 사라진다. 막대가 입자 i에 작용하는 힘을 $\mathbf{F}_i$라 하자. 입자의 가속도는 $+x$ 방향으로 $\omega^2(r - d_i\sin\beta)$이므로

$$\mathbf{F}_i + (0, -m_ig) = (m_i\omega^2(r - d_i\sin\beta),\ 0) \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{F}_i = (m_i\omega^2(r - d_i\sin\beta),\ m_ig).$$

뉴턴의 제3법칙에 의해, 입자 i는 점 $(x_i, y_i) = (d_i\sin\beta,\ d_i\cos\beta)$에서 막대에 $-\mathbf{F}_i$를 작용한다. (x, y)에 작용하는 힘 (X, Y)의 H에 대한 반시계 방향 모멘트는 $xY - yX$이므로, $-\mathbf{F}_i$의 모멘트는

$$-d_i\sin\beta\cdot m_ig + d_i\cos\beta\cdot m_i\omega^2(r - d_i\sin\beta).$$

이다. 경첩의 힘은 H에 대한 모멘트가 없고 막대는 가벼우므로, 이 두 모멘트의 합은 0이다. $\omega^2\sin\beta$로 나누고(이 값은 0이 아니다. $\beta = 0$이면 모멘트 방정식이 $\sum m_id_i\omega^2r = 0$이 되는데, 이는 거짓이다) $g/\omega^2 = a$를 이용하면

$$\sum_{i=1}^{2} m_id_i(-a + r\cot\beta - d_i\cos\beta) = 0,$$

즉

$$(m_1d_1 + m_2d_2)\,r\cot\beta = (m_1d_1 + m_2d_2)\,a + (m_1d_1^2 + m_2d_2^2)\cos\beta.$$

이다. $m_1 d_1 + m_2 d_2 > 0$으로 나누면

$$r \cot \beta = a + b \cos \beta, \qquad b = \frac{m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2}{m_1 d_1 + m_2 d_2}.$$

검산

- 입자가 하나뿐이면(예를 들어 $m_2 = 0$) $b = d_1$이 되어 소문항 (i)의 결과를 다시 얻는다. $d_1 = d_2 = d$이면 역시 $b = d$이다. 같은 점에 있는 두 입자는 하나의 입자처럼 행동한다.
- b는 d_1과 d_2의 ($m_i d_i$를 가중치로 하는) 가중평균(weighted average)이므로, 마땅히 두 값 사이에 있다.
- $\omega \to 0$이면 $a \to \infty$이므로 $\cot \alpha \to \infty$이고, 막대는 연직에 가까워진다. 원판이 거의 돌지 않을 때 기대되는 결과이다. $d > r$인 상태에서 $\omega \to \infty$이면 $a \to 0$이고 방정식은 $r = d \sin \alpha$에 가까워진다. 즉 입자는 회전축에 다가가며, 그곳에서는 구심력(centripetal force)이 거의 필요하지 않다.
- $r = 1\,\mathrm{m}$, $\omega = 5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, $d = 0.6\,\mathrm{m}$, $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$이면 $a = 0.3924\,\mathrm{m}$이고, 방정식에서 $\alpha \approx 0.9251$ (약 53.0°)을 얻는다. 이때 $r \cot \alpha \approx 0.7538 \approx a + d \cos \alpha$이다. 이 각에서 정지 상태로 출발시킨 막대의 운동을 컴퓨터로 시뮬레이션하면 막대는 그 자리에 머문다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 각 입자가 막대에 작용하는 힘이 막대 방향이라고 가정하는 것. 그것은 입자가 하나일 때만 성립하는 특수한 사실이며, 입자가 둘이면 H에 대한 전체 모멘트만 0이다.
- 입자가 그리는 원의 반지름으로 $r - d \sin \alpha$ 대신 r (또는 $d \sin \alpha$)를 쓰는 것.
- 경첩의 힘이 경첩을 향해 작용한다고 답하는 것. 막대는 압축 상태에 있으므로, 경첩은 막대를 P 쪽으로 민다.

STEP 너머

소문항 (ii)의 모멘트 방정식은 유효 퍼텐셜(effective potential) $\sum m_i \left(g d_i \cos \theta - \frac{1}{2} \omega^2 (r - d_i \sin \theta)^2 \right)$이 정류값을 가질(stationary) 조건이다. 회전 좌표계(rotating frame)에서는 원심력(centrifugal force)이 추가된 퍼텐셜처럼 행동한다. 이는 원심 조속기(centrifugal governor)와 같은 회전계를 분석하고, 정상 상태가 안정한지(stable) 묻는 출발점이 된다. 여기서 유효 퍼텐셜은 $\theta = \alpha$에서 극댓값을 가지므로, 소문항 (i)의 정상 상태는 사실 불안정

하다. 막대를 살짝 건드리면 멀리 흔들려 나간다. Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체의 모멘트와 회전 좌표계를 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.