풀이

STEP III 2015, 문제 10

역학 • 회전하는 강체 막대

STEP III 2015, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

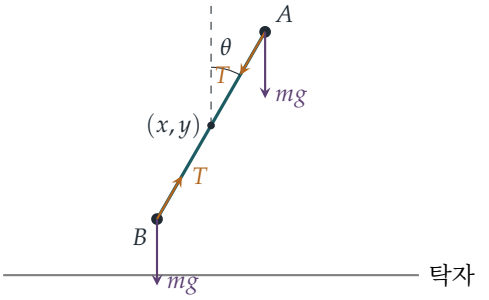
step.maths.org/questions/15-s3-q10

핵심 아이디어

계를 중점의 운동과 막대의 회전으로 기술한다. 각 입자의 위치를 x, y, θ로 나타내고, 두 번 미분한 다음, 각 입자에 뉴턴 제2법칙(Newton's second law)을 적용한다. 두 식을 더하면 장력(tension)이 사라지고 질량중심(centre of mass)의 운동이 나온다. 두 식을 빼고 막대에 수직인 방향으로 분해하면 장력이 다시 사라지고 회전만 남는다. 세 가속도를 모두 알고 나면, 마지막 부분은 포물체 운동(projectile motion)에 일정한 회전을 더한 것이 된다.

풀이

두 질량을 가벼운 강체 막대로 연결된 입자로 모형화한다. 각 입자에 작용하는 힘은 무게와 막대가 가하는 힘뿐이며, 막대가 가하는 힘은 막대 방향으로 작용한다. 장력을 T라 하자. 그러면 $T > 0$은 막대가 각 입자를 중점 쪽으로 당긴다는 뜻이다. (막대는 밀 수도 있으며, 그 때는 $T < 0$이다. 아래의 어떤 내용도 부호에 의존하지 않는다.)



입자 A의 운동 방정식

처음에 중점보다 위에 있는 막대 끝의 입자를 A라 하자. 그러면 중점에서 A로 가는 벡터는 $a(\sin\theta, \cos\theta)$이다. 따라서 A의 위치는

$$\mathbf{r}_A = \begin{pmatrix} x + a\sin\theta \\ y + a\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \text{이므로} \qquad \dot{\mathbf{r}}_A = \begin{pmatrix} \dot{x} + a\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} - a\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$$

이다. 이는 연쇄법칙(chain rule)에 의한 것이다. 이것이 구하는 속도이다. $\dot{\theta}\cos\theta$와 $\dot{\theta}\sin\theta$에 곱의 미분법(product rule)을 써서 한 번 더 미분하면

$$\ddot{\mathbf{r}}_A = \begin{pmatrix} \ddot{x} + a\ddot{\theta}\cos\theta - a\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y} - a\ddot{\theta}\sin\theta - a\dot{\theta}^2\cos\theta \end{pmatrix}.$$

막대는 A를 중점 쪽, 즉 $-(\sin\theta, \cos\theta)$ 방향으로 크기 T의 힘으로 당긴다. 중력은 $-mg(0,1)$을 준다. 따라서 A에 대한 뉴턴 제2법칙은 정확히 문제에 주어진 식이 된다.

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x} + a\ddot{\theta}\cos\theta - a\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y} - a\ddot{\theta}\sin\theta - a\dot{\theta}^2\cos\theta \end{pmatrix} = -T\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} - mg\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{A}$$

다른 입자

반대쪽 끝에 있는 B에 대해서는 모든 곳에서 a를 $-a$로 바꾼다. 이제 막대는 B를 $+(\sin\theta, \cos\theta)$ 방향으로 당긴다.

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x} - a\ddot{\theta}\cos\theta + a\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y} + a\ddot{\theta}\sin\theta + a\dot{\theta}^2\cos\theta \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} - mg\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{B}$$

여기서 B의 속도는 $(\dot{x} - a\dot{\theta}\cos\theta,\ \dot{y} + a\dot{\theta}\sin\theta)$이다.

가속도 구하기

(A)와 (B)를 더하면 a나 T를 포함한 항이 모두 소거된다.

$$2m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -2mg\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{따라서} \qquad \ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g.$$

(A)에서 (B)를 빼고 2로 나누면 다음을 얻는다.

$$ma\ddot{\theta}\cos\theta - ma\dot{\theta}^2\sin\theta = -T\sin\theta,$$
$$-ma\ddot{\theta}\sin\theta - ma\dot{\theta}^2\cos\theta = -T\cos\theta.$$

? **생각해 보기** 값을 모르는 T를 어떻게 없앨 수 있을까?

장력은 막대 방향으로 작용하므로, 막대에 수직인 방향 $(\cos\theta, -\sin\theta)$으로 분해한다. 즉, 첫 번째 식에 $\cos\theta$를 곱한 것에서 두 번째 식에 $\sin\theta$를 곱한 것을 뺀다. 우변은 $-T\sin\theta\cos\theta + T\cos\theta\sin\theta = 0$이 되고, $\dot\theta^2$ 항들도 같은 방식으로 소거된다. 남는 것은

$$ma\ddot\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 0,$$

이고, $m, a \neq 0$이므로 $\ddot\theta = 0$이다. (대신 막대 방향으로 분해하면 $T = ma\dot\theta^2$을 얻는데, 이는 중점을 중심으로 하는 원운동에 필요한 장력이다.)

마지막 부분

$t = 0$일 때 막대는 연직이므로 $\theta = 0$이다. 이때 입자 A가 위쪽에 있고 속도는 $(\dot x + a\dot\theta,\ \dot y)$이며, B가 아래쪽에 있고 속도는 $(\dot x - a\dot\theta,\ \dot y)$이다. 이를 주어진 처음 속도와 맞추면

$$\dot x + a\dot\theta = u, \qquad \dot x - a\dot\theta = 0, \qquad \dot y = v,$$

이므로 처음에 $\dot x = \frac{1}{2}u, \dot\theta = \dfrac{u}{2a}, \dot y = v$이다.

앞 부분에 의해 $\dot\theta$는 일정하게 유지되므로 $\theta = \dfrac{ut}{2a}$이다. θ가 증가하도록 $u > 0$으로 둔다. 또한 $y(0) = h$에서 $\ddot y = -g$이므로

$$y = h + vt - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

막대가 $\frac{1}{2}\pi$만큼 회전하는 것은 $\dfrac{ut}{2a} = \dfrac{\pi}{2}$, 즉 $t = \dfrac{\pi a}{u}$일 때이다. 이때 막대는 수평이므로 두 입자 모두 중점의 높이 y에 있다. 두 입자가 이 순간에 함께 탁자에 닿는 것은 그때 $y = 0$인 경우와 정확히 같다.

$$h + v\cdot\frac{\pi a}{u} - \frac{1}{2}g\cdot\frac{\pi^2a^2}{u^2} = 0.$$

양변에 $2u^2$을 곱하고 정리하면

$$2hu^2 = \pi^2a^2g - 2\pi uva,$$

가 되어 요구된 결과를 얻는다.

검산

- $v = 0$이면 떨어지는 데 걸리는 시간은 $\sqrt{2h/g}$이고, 이것이 $\pi a/u$와 같아야 한다. 제곱하면 $2hu^2 = \pi^2a^2g$이 되어 결과와 일치한다.
- 단위: 결과의 모든 항은 차원(dimensions) $\mathrm{L^3T^{-2}}$을 가진다.
- 강체 막대로 연결된 두 입자를 컴퓨터로 시뮬레이션하였다. $g = 9.8$로 두고 a, u, v를 여러 번 무작위로 고른 뒤 h는 공식으로 정하였다. 예를 들어 $a \approx 1.754$이면 $h \approx 17.93$이다. 모든 경우에 두 입자는 10^{-10} 이내의 오차로 $t = \pi a/u$에 막대가 수평인 상태로 함께 탁자에 닿았다.

흔한 실수

- 두 입자 중 하나에 대해 장력의 방향을 잘못 잡는 것. 막대는 각 입자를 중점 쪽으로 당기므로 두 힘은 크기가 같고 방향이 반대이다.
- 각 식에서 서로 다른 T 값을 쓰는 것. 막대는 가벼우므로 막대에 작용하는 알짜힘은 0이어야 하고, 따라서 양 끝의 장력은 같다.
- $\dot{\theta}\cos\theta$를 미분할 때 $-a\dot{\theta}^2$ 항을 빠뜨리는 것. 이 항이 없으면 빼는 단계가 깔끔하게 정리되지 않는다.

STEP 너머

이 문제는 입자계에 관한 일반적인 정리의 작은 예이다. 질량중심은 모든 질량과 모든 외력이 그곳에 집중된 것처럼 운동한다. 내력은 쌍으로 상쇄되므로, 질량중심에 대한 외부 토크(torque)가 없으면 질량중심에 대한 각운동량(angular momentum)이 보존된다. 대학 1학년 역학에서는 라그랑주 방법(Lagrangian approach)도 배우게 되는데, 이 방법은 x, y, θ를 일반화 좌표(generalised coordinates)로 삼으며 T가 전혀 필요하지 않다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 질량중심과 강체 회전(rigid-body rotation)을 철저하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.