풀이

STEP III 2015, 문제 1

순수수학 • 점화 공식과 치환

> **STEP III 2015, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q1

핵심 아이디어

소문항 (i)에서 $I_n - I_{n+1}$은 분자에 u^2이 있는 하나의 적분으로 합쳐진다. u^2을 $u \cdot u$로 쓰고 부분적분(integration by parts)을 하면 다시 I_n이 나온다. 소문항 (ii)에서 식 $(x - x^{-1})^2$은 x를 $1/x$로 바꾸어도 변하지 않으며, 이 치환(substitution)에서 인수 x^{-2}가 생긴다. 두 형태를 평균하면 $1 + x^{-2}$가 나오는데, 이것은 정확히 $x - x^{-1}$의 도함수이므로 치환 $u = x - x^{-1}$이 잘 작동한다. 소문항 (iii)은 분모를 $x - x^{-1}$로 나타내고 나면 모습만 바꾼 소문항 (ii)이다.

풀이

소문항 (i)

두 피적분함수를 통분하여 합치면

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^\infty \frac{(1+u^2)-1}{(1+u^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty u \cdot \frac{u}{(1+u^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}u.$$

두 번째 인수는 원시함수(antiderivative)를 쉽게 구할 수 있다.

$$\int \frac{u}{(1+u^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2n(1+u^2)^n}.$$

따라서 u는 미분하고 $u/(1+u^2)^{n+1}$은 적분하는 방식으로 부분적분을 하면

$$I_n - I_{n+1} = \left[-\frac{u}{2n(1+u^2)^n}\right]_0^\infty + \frac{1}{2n}\int_0^\infty \frac{1}{(1+u^2)^n}\,\mathrm{d}u.$$

경계항(boundary term)은 $u = 0$에서 0이다. 또한 $n \geq 1$이면 $0 \leq u/(1+u^2)^n \leq u/(1+u^2) < 1/u$이므로, $u \to \infty$일 때에도 경계항은 0으로 수렴(converge)한다. 그러므

로

$$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2n} I_n,$$

이고, 이것이 증명하려던 식이다. 정리하면

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n \qquad (n \geq 1).$$

초깃값은 $I_1 = [\arctan u]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$이다. 이 점화식(recurrence relation)을 반복해서 적용하면

$$I_{n+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}.$$

? **생각해 보기** 홀수들의 곱을 어떻게 계승(factorial)으로 바꿀 수 있을까?

분자와 분모에 짝수들의 곱 $2 \cdot 4 \cdots (2n) = 2^n n!$을 곱한다. 그러면 분자는 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n) = (2n)!$이 되고, 분모는 $(2^n n!)^2$이 된다. 따라서

$$I_{n+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{(2n)!\,\pi}{2^{2n+1}(n!)^2},$$

이고, 이것이 증명하려던 식이다. (엄밀한 증명은 수학적 귀납법(induction)으로 한다. 공식은 $n = 0$일 때 $I_1 = \frac{\pi}{2}$를 주므로 성립한다. 공식이 I_n에 대해 성립하면, $\frac{2n-1}{2n} = \frac{(2n-1)(2n)}{(2n)^2}$을 곱할 때 $\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}$이 $\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$로 바뀐다.)

소문항 (ii)

첫 번째 등식. J에서 $x = 1/t$로 치환하면 $\mathrm{d}x = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$이고, x가 0에서 ∞까지 변하는 것은 t가 ∞에서 0까지 변하는 것에 대응한다. 또한 제곱을 하면 부호 변화가 사라지므로

$$\left(x - x^{-1}\right)^2 = \left(t^{-1} - t\right)^2 = \left(t - t^{-1}\right)^2,$$

이다. 그러므로

$$J = \int_\infty^0 \mathrm{f}((t-t^{-1})^2)\left(-t^{-2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{-2}\,\mathrm{f}((t-t^{-1})^2)\,\mathrm{d}t,$$

이고, 적분 변수(dummy variable) t의 이름을 x로 바꾸면 첫 번째 형태를 얻는다.

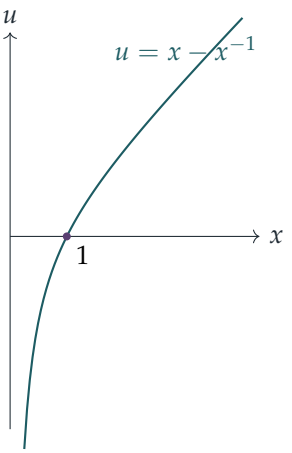
두 번째 등식. J의 원래 식과 이 식을 더하여 반으로 나누면

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(1 + x^{-2}\right)\mathrm{f}((x-x^{-1})^2)\,\mathrm{d}x.$$

세 번째 등식. 이제 $u = x - x^{-1}$로 놓으면 $\mathrm{d}u = (1 + x^{-2})\,\mathrm{d}x$이다. $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x > 0$이므로 u는 x에 대하여 순증가하며, $-\infty$ ($x \to 0^+$일 때)에서 $+\infty$ ($x \to \infty$일 때)까지 변한다. 따라서 이 치환은 전체 구간에서 일대일(one-to-one) 변수 변환이다.

$$J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{f}(u^2)\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty \mathrm{f}(u^2)\,\mathrm{d}u.$$

마지막 단계가 성립하는 것은 $\mathrm{f}(u^2)$이 u에 대한 우함수(even function)이어서 $(-\infty, 0)$과 $(0, \infty)$에서의 적분이 같기 때문이다. 이로써 소문항 (ii)가 증명되었다.



이 곡선은 $(1, 0)$을 지나고 $x > 0$에서 꾸준히 증가하며, u의 모든 실숫값을 정확히 한 번씩 지난다.

소문항 (iii)

목표는 피적분함수를 $x^{-2}\,\mathrm{f}((x - x^{-1})^2)$ 꼴로 다시 쓰는 것이다. $(x - x^{-1})^2 = x^2 - 2 + x^{-2}$이므로

$$x^4 - x^2 + 1 = x^2\left(x^2 - 1 + x^{-2}\right) = x^2\left(1 + (x - x^{-1})^2\right).$$

그러므로

$$\frac{x^{2n-2}}{(x^4 - x^2 + 1)^n} = \frac{x^{2n-2}}{x^{2n}(1 + (x - x^{-1})^2)^n} = x^{-2}\,\mathrm{f}((x - x^{-1})^2), \qquad \text{여기서} \mathrm{f}(y) = \frac{1}{(1+y)^n}.$$

소문항 (ii)에서 얻은 J의 첫 번째 형태와 마지막 형태에 의하여

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-2}}{(x^4 - x^2 + 1)^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{(1+u^2)^n}\,\mathrm{d}u = I_n.$$

소문항 (i)의 공식에서 n을 $n-1$로 바꾸면($n - 1 \geq 0$, 즉 모든 양의 정수 n에 대하여 성립한다)

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-2}}{(x^4 - x^2 + 1)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{(2n-2)!\,\pi}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}.$$

검산

▶ $n = 1$일 때 답은 $\frac{\pi}{2}$이므로 $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4 - x^2 + 1} = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$이다. $n = 2$일 때는 $\frac{\pi}{4}$이고, $n = 3$일 때는 $\frac{3\pi}{16} \approx 0.5890$이다. 원래 적분을 수치 적분한 값은 이 값들과 모두 일치하며,

$n = 8$까지의 경우와도 일치한다.

- 점화식에서 얻은 $I_2 = \frac{1}{2}I_1 = \frac{\pi}{4}$는 $u = \tan\theta$로 직접 계산한 결과와 일치한다: $I_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}$.
- $\mathrm{f}(y) = \mathrm{e}^{-y}$로 놓으면 소문항 (ii)는 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x-1/x)^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2} \, \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.88623$임을 말해 준다. 네 가지 형태를 모두 수치적으로 계산하면 이 값이 나온다.

흔한 실수

- 경계항 $u/(1+u^2)^n$이 무한대에서 사라지는지 확인하지 않는 것. 여기서는 사라지지만, 그것은 $n \geq 1$이기 때문이다.
- $u = x - x^{-1}$로 치환하고도 적분 구간을 0과 ∞로 그대로 두는 것. 새 아래끝은 $-\infty$이며, 구간을 다시 $(0, \infty)$로 되돌려 주는 것은 $\mathrm{f}(u^2)$이 우함수라는 사실이다.
- 첨자를 옮기지 않고 I_{n+1}의 공식을 그대로 쓰는 것. 소문항 (iii)의 답은 I_{n+1}이 아니라 I_n이다.

STEP 너머

비 $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \binom{2n}{n}/4^n$은 중심 이항 확률(central binomial probability)이며, 소문항 (i)의 점화식은 π에 대한 월리스 곱(Wallis product)을 주는 점화식과 같다. 소문항 (ii)의 기법은 코시(Cauchy)–Schlömilch 변환이라고 불린다. 이 변환을 이용하면 검산에서 본 것과 같은 가우스(Gauss)형 적분을 비롯하여, 초등함수로 된 원시함수가 없는 많은 정적분의 값을 구할 수 있다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 잘 고른 치환으로 풀리는 적분이 더 많이 실려 있고, Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*는 이상적분(improper integral)과 변수 변환을 엄밀하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.