풀이

STEP II 2015, 문제 9

역학 • 강체의 회전

> **STEP II 2015, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q9

핵심 아이디어

이 계의 모든 것은 한 점, 곧 두 입자의 질량중심(centre of mass) G가 좌우한다. A에 고정된 강체(rigid body)는 G가 A의 연직 아래에 있을 때 정지한 채 매달리고, G를 꼭대기 너머로 넘길 만큼 에너지가 충분할 때에만 완전한 회전을 한다. 따라서 G의 위치와 A로부터의 거리를 구하면 두 소문항 모두 금방 풀린다.

풀이

B와 C를 가벼운 강체 막대로 연결된 입자로, A에 있는 축을 매끄러운 축으로 모형화한다. 따라서 일을 하는 힘은 무게뿐이다.

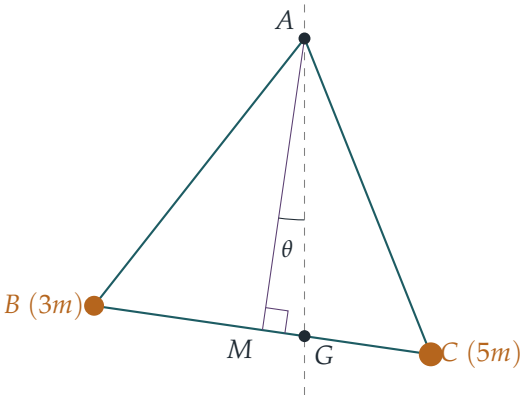
소문항 (i)

막대가 가벼우므로 계의 질량중심은 B에 있는 $3m$과 C에 있는 $5m$의 질량중심이다. 이 점 G는 BC 위에 있고

$$BG = \frac{5}{8}a, \qquad CG = \frac{3}{8}a.$$

BC의 중점을 M이라 하자. 그러면 C 쪽으로 $MG = \frac{5}{8}a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{8}a$이다. 삼각형이 정삼각형이므로 $AM \perp BC$이고 $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$이다. 따라서 삼각형 AMG에 피타고라스 정리(Pythagoras' theorem)를 적용하면

$$AG^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{64} = \frac{49a^2}{64}, \qquad AG = \frac{7a}{8}.$$



평형(equilibrium) 상태에서 G에 작용하는 무게 $8mg$의 A에 대한 모멘트(moment)는 0이어야 하므로, G는 A의 연직 아래에 있다. 즉 직선 AG는 연직이다. 그런데 BC는 AM에 수직이고, 수평선은 연직선 AG에 수직이다. 두 직선을 모두 직각만큼 회전해도 그 사이의 각은 변하지 않으므로

$$\theta = \angle GAM.$$

직각삼각형 AMG(M에서 직각)에서

$$\sin\theta = \frac{MG}{AG} = \frac{a/8}{7a/8} = \frac{1}{7},$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다. 더 무거운 입자인 C가 BC의 낮은 쪽 끝에 있다는 점에 주목하자. 당연히 그래야 한다.

소문항 (ii)

두 입자 모두 축으로부터의 거리가 a이므로 항상 같은 속력을 가진다. 삼각형이 각속력(angular speed) ω로 회전하면 각 입자의 속력은 $a\omega$이다. 충격량(impulse)을 받은 직후 B의 속력이 v이므로 C의 속력도 같고, 운동 에너지(kinetic energy)는

$$\tfrac{1}{2}(3m)v^2 + \tfrac{1}{2}(5m)v^2 = 4mv^2.$$

(같은 이야기이지만, A에 대한 관성 모멘트(moment of inertia)는 $8ma^2$이고 $\omega = v/a$이다.) 아래의 에너지 방정식에는 속력만 들어가므로 충격량의 방향은 상관없다.

> ? **생각해 보기** 줄에 매달린 입자처럼, 꼭대기에서 무언가가 팽팽하게 유지되도록 v가 충분히 커야 할까?

그렇지 않다. 막대는 강체이므로 당길 뿐 아니라 밀 수도 있다. 따라서 필요한 조건은 계가 한 바퀴를 다 돌기 전에 각속력이 0으로 떨어지지 않는 것뿐이다. 이것은 순수한 에너지 조건이다.

계의 위치 에너지(potential energy)는 G의 높이에 $8mg$를 곱한 값이다. G는 A를 중심으로 반지름 $AG = \frac{7}{8}a$인 원 위를 움직이므로, 위치 에너지는 G가 A의 연직 위에 있을 때 가장 크며, 이때 처음 위치보다

$$2 \cdot \frac{7a}{8} = \frac{7a}{4}$$

만큼 높다. 에너지 보존(conservation of energy)에 의해, G가 h만큼 올라간 위치에서

$$4m(a\omega)^2 = 4mv^2 - 8mgh.$$

우변은 $h = \frac{7}{4}a$일 때 가장 작다. 그곳에서 우변이 양수이면 운동 내내 $\omega \neq 0$이므로 ω의 부호는 바뀌지 않고, 계는 같은 방향으로 계속 돌며 회전을 거듭한다. 음수이면 G가 꼭대기에 이르기 전에 ω가 0이 되어야 하므로 계는 되돌아 흔들린다. 따라서 조건은

$$4mv^2 > 8mg \cdot \frac{7a}{4} \iff v^2 > \frac{7ag}{2}.$$

따라서

$$v_0 = \sqrt{\frac{7ag}{2}}.$$

(정확히 $v = v_0$이면 G는 A 위의 위치를 향해 천천히 다가가며, 거기에 도달하는 데 무한히 긴 시간이 걸린다. 이 때문에 조건은 등호가 없는 부등식(strict inequality)이다.)

검산

- 질량이 같다면 G는 M에 있어 $\theta = 0$이고 $AG = \frac{\sqrt{3}}{2}a$이다. $MG = 0$으로 두면 위의 공식들은 정확히 이 결과를 준다.
- 모든 방향에 대해 위치 에너지를 수치적으로 최소화하면 $\sin\theta = 0.142857\ldots = \frac{1}{7}$을 얻는다.
- 단위: ag의 단위는 $\mathrm{m^2\,s^{-2}}$이므로 v_0은 속력이다. $a = 1\,\mathrm{m}$이고 $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$이면 $v_0 \approx 5.86\,\mathrm{m\,s^{-1}}$이다.
- 운동을 한 단계씩 계산하는 컴퓨터 시뮬레이션으로 $v = 1.01v_0$이면 계가 꼭대기를 넘어가고 $v = 0.99v_0$이면 되돌아 흔들린다는 것을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- G가 올라가는 높이를 (AG 대신 AM을 써서) $2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a$로 잡는 실수. 이렇게 하면 $v_0^2 = 2\sqrt{3}\,ag$가 된다.
- B와 C를 따로 다루면서 충격량이 C에도 속력 v를 준다는 사실을 잊는 실수.
- 꼭대기에서 "줄이 팽팽하게 유지된다"는 조건을 부과하는 실수. 막대는 미는 힘(thrust)을 받을 수 있으므로 그런 조건은 필요 없다.

STEP 너머

여기서의 에너지 논증은 복합 진자(compound pendulum)의 강체 버전이다. 질량중심으로부터 거리 d인 곳에 고정된 물체는 운동 방정식 $I\ddot{\psi} = -Mgd\sin\psi$를 따르며 단진자(simple pendulum)처럼 움직인다. 대학 1학년 과정에서는 이 방정식의 위상 평면(phase plane)을 배우게 되는데, 여기서 임계 속력 v_0은 진동과 완전한 회전을 나누는 분리선(separatrix)에 해당한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 고정축에 대한 강체의 회전과 물리 진자를 자세히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.