풀이

STEP II 2015, 문제 8

순수수학 • 벡터와 접하는 원

STEP II 2015, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s2-q8

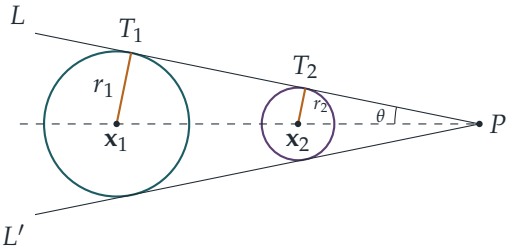
핵심 아이디어

각 원의 중심은 두 접선(tangent)으로부터 같은 거리(자기 반지름)만큼 떨어져 있으므로, 두 중심은 모두 L과 L'이 이루는 각을 이등분하는 직선 위에 있다. 그 직선 위에서 P로부터의 거리는 반지름에 비례하고, 이로부터 (i)의 공식이 곧바로 나온다. (ii)에서는 공식을 $r_1 r_2$로 나누면 훨씬 대칭적인 모양이 된다. $\mathbf{x}_i / r_i$와 $1/r_i$로 나타내면 세 초점(focus)은 계수의 합이 0인 하나의 일차 관계식을 만족하는데, 이것이 바로 한 직선 위에 있다(collinear)는 뜻이다.

풀이

소문항 (i)

P에서 L과 L'이 이루는 각 가운데 원들을 포함하는 각의 절반을 θ라 하자.



원의 접선은 중심으로부터의 수직 거리가 반지름과 같다. 따라서 $\mathbf{x}_1$은 L과 L' 모두로부터 거리 r_1만큼 떨어져 있고, 만나는 두 직선으로부터 같은 거리에 있는 점들은 P에서의 두 각의 이등분선(angle bisector) 가운데 하나 위에 있다. 두 원은 L에 대해 같은 쪽에, 그리고

L'에 대해서도 같은 쪽에 있으므로, 두 중심은 L과 L'이 나누는 네 각 영역 가운데 같은 영역에 있다. 그러므로 두 중심은 P에서 출발하는 **같은** 반직선, 즉 그 영역의 이등분선 위에 있다. 이 반직선 방향으로 P에서 원들을 향하는 단위벡터(unit vector)를 $\mathbf{u}$라 하자.

L이 C_1에 접하는 점을 T_1이라 하면, 삼각형 PT_1X_1(여기서 X_1은 중심)은 T_1에서 직각이므로 $r_1 = PX_1 \sin\theta$이다. 같은 방법으로 $r_2 = PX_2 \sin\theta$이다. 따라서

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{p} = \frac{r_1}{\sin\theta}\,\mathbf{u}, \qquad \mathbf{x}_2 - \mathbf{p} = \frac{r_2}{\sin\theta}\,\mathbf{u},$$

이고, 여기서 $\mathbf{p}$는 P의 위치벡터(position vector)이다. $\mathbf{u}/\sin\theta$를 소거하면

$$r_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{p}) = r_1(\mathbf{x}_2 - \mathbf{p}) \quad \Longrightarrow \quad (r_1 - r_2)\,\mathbf{p} = r_1\mathbf{x}_2 - r_2\mathbf{x}_1.$$

두 원의 크기가 다르므로 $r_1 \neq r_2$이고, 따라서 양변을 나눌 수 있다.

$$\mathbf{p} = \frac{r_1\mathbf{x}_2 - r_2\mathbf{x}_1}{r_1 - r_2},$$

이것이 구하는 결과이다. (반지름이 같으면 L과 L'이 평행하게 되어 초점이 아예 존재하지 않는다.)

소문항 (ii)

> **생각해 보기** $\mathbf{p}$에 대한 공식은 한눈에 보이는 방식으로 대칭적이지 않다. 세 초점이 서로 비슷한 모양이 되도록 고쳐 쓸 수 있을까?

$(r_1 - r_2)\mathbf{p} = r_1\mathbf{x}_2 - r_2\mathbf{x}_1$을 r_1r_2로 나누자. $s_i = 1/r_i$, $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i/r_i$로 쓰면 이 식은

$$(s_2 - s_1)\,\mathbf{p} = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1.$$

이 된다. 나머지 두 쌍의 원에 소문항 (i)을 적용하면($r_3 \neq r_1$, $r_3 \neq r_2$이고 원들이 겹치지 않으므로 적용할 수 있다), Q와 R의 위치벡터를 각각 $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$이라 할 때

$$(s_3 - s_1)\,\mathbf{q} = \mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1, \qquad (s_3 - s_2)\,\mathbf{r} = \mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_2.$$

을 얻는다. 우변들은 $(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) + (\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_2) = \mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1$을 만족하므로

$$(s_2 - s_1)\,\mathbf{p} + (s_3 - s_2)\,\mathbf{r} = (s_3 - s_1)\,\mathbf{q}.$$

이다. $s_3 \neq s_1$이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{q} = \lambda\,\mathbf{p} + (1 - \lambda)\,\mathbf{r}, \qquad \text{여기서} \lambda = \frac{s_2 - s_1}{s_3 - s_1},$$

두 계수 $\frac{s_2 - s_1}{s_3 - s_1}$과 $\frac{s_3 - s_2}{s_3 - s_1}$의 합이 1이기 때문이다. 따라서 $\mathbf{q} = \mathbf{r} + \lambda(\mathbf{p} - \mathbf{r})$이고, 이는 R과 P를 지나는 직선 위의 점이다. 그러므로 P, Q, R은 한 직선 위에 있다. (만약 P와 R이 일치하면 이 식에서 $Q = P = R$도 성립하므로, 명제는 자명하게 성립한다.)

소문항 (iii)

소문항 (ii)에서 $\mathbf{q} = \lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{r}$이다. $P \neq R$이라 가정하면, 점 $\lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{r}$이 중점(midpoint) $\frac{1}{2}(\mathbf{p}+\mathbf{r})$이 되는 것은 정확히 $\lambda = \frac{1}{2}$일 때이다(λ의 값이 다르면 직선 위의 다른 점이 된다). 따라서 조건은

$$\frac{s_2 - s_1}{s_3 - s_1} = \frac{1}{2} \iff 2s_2 = s_1 + s_3 \iff \frac{2}{r_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \iff r_2 = \frac{2r_1 r_3}{r_1 + r_3}.$$

이다. 말로 하면, r_2는 r_1과 r_3의 조화평균(harmonic mean)이어야 한다. (퇴화된(degenerate) 경우인 $P = R$에서는 세 초점이 모두 일치하므로, 반지름이 어떻든 Q는 자명하게 한가운데에 있다.)

검산

- 소문항 (i): $r_2 \to 0$으로 하면 C_2가 한 점으로 줄어들고, 공식은 $\mathbf{p} = \mathbf{x}_2$를 준다. 한 점에서 그은 접선은 그 점을 지나기 때문이다. 또한 $\mathbf{p}$는 $\mathbf{x}_2 + \frac{r_2}{r_1 - r_2}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$이므로, 그림에서처럼 $r_2 < r_1$일 때 작은 원 너머에 있다.
- (iii)의 수치 예: 중심이 $(0,0)$, $(10,1)$, $(3,8)$이고 반지름이 1, $\frac{3}{2}$, 3인 원을 잡으면 $\frac{2}{3/2} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$이다. 이때 $P = (-20,-2)$, $R = (17,-6)$, $Q = (-\frac{3}{2},-4)$이고, 실제로 Q는 PR의 중점이다.
- 공식은 컴퓨터로도 확인하였다. 무작위로 고른 여러 쌍의 원에 대해 두 접선의 교점을 직접 구하면 같은 점 P가 나온다.

흔한 실수

- P가 왜 두 중심을 잇는 직선 위에 있는지, 또는 왜 P가 두 중심을 잇는 선분 바깥에 있는지 설명하지 않는 것(두 중심을 모두 품는 것은 P에서 출발하는 **같은** 반직선이다).
- 관계식의 계수의 합이 0인지 확인하지 않고 $\mathbf{q} - \mathbf{p}$와 $\mathbf{r} - \mathbf{p}$가 평행함을 보이려는 것. 관계식 $\alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q} + \gamma\mathbf{r} = \mathbf{0}$이 세 점이 한 직선 위에 있음을 뜻하는 것은 $\alpha + \beta + \gamma = 0$일 때뿐이다.

STEP 너머

초점 P는 C_1을 C_2로 옮기는, 양의 배율 r_2/r_1을 갖는 확대(enlargement, 닮음변환 homothety)의 중심이다. 소문항 (ii)는 몽주(Monge)의 세 원 정리이다. Q와 R을 중심으로 하는 확대를 합성하면 P를 중심으로 하는 확대가 되고, 두 확대를 합성한 확대의 중심은 두 중심을 지나는 직선 위에 있다. (ii)의 계산은 무게중심좌표(barycentric coordinates, 아핀 좌표)를

처음 맛보는 것으로, 이 좌표에서 세 점이 한 직선 위에 있다는 것은 계수의 합이 0인 일차 관계식으로 표현된다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)는 이 뒤에 있는 선형사상을 다루고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 이런 종류의 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.