풀이

STEP II 2015, 문제 7

순수수학 • 교차하는 원

> **STEP II 2015, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q7

핵심 아이디어

두 원이 두 점에서 만날 때, 그 두 점을 지나는 직선(공통현, common chord)은 두 중심을 잇는 직선에 수직이다. 원 D가 C를 이등분(bisect)하는 것은 정확히 이 현이 C의 지름일 때, 즉 이 현이 C의 중심을 지날 때이다. 그러면 두 중심과 한 교점이 이루는 직각삼각형에 피타고라스(Pythagoras) 정리를 적용하여 "이등분한다"는 조건을 하나의 방정식 $(\text{중심 사이의 거리})^2 = r^2 - a^2$으로 바꿀 수 있다.

풀이

소문항 (i)

D의 중심을 Q, 반지름을 r라 하고, O를 원점이라 하자.

일반적인 조건. D가 C를 이등분하고, $|P| = a$인 두 점 P와 $P' = -P$에서 만난다고 하자. 두 점 모두 D 위에 있으므로 $QP = QP' = r$이다. 따라서 Q는 P와 P'에서 같은 거리에 있으므로 PP'의 수직이등분선(perpendicular bisector) 위에 있고, 이 직선은 O(PP'의 중점)를 지난다. 그러므로 $OQ \perp OP$이고, 삼각형 OQP에 피타고라스 정리를 적용하면 다음을 얻는다.

$$r^2 = OQ^2 + a^2. \qquad (*)$$

역으로, D가 $OQ^2 = r^2 - a^2$이고 $OQ > 0$인 임의의 원이면, P를 C 위에서 $OP \perp OQ$가 되도록 잡자. 그러면 $QP^2 = OQ^2 + a^2 = r^2$이고, $-P$에 대해서도 마찬가지이므로 D는 C의 지름의 양 끝점인 두 점을 지난다. 서로 다른 두 원은 많아야 두 점에서 만나므로 이 두 점이 유일한 교점이고, D는 C를 이등분한다.

$r > a$일 때의 존재성. 중심을 x축 위, O로부터 거리 $\sqrt{r^2 - a^2} > 0$인 곳에 두자.

$$(x - \sqrt{r^2 - a^2}\,)^2 + y^2 = r^2.$$

직접 확인해 보자. 이 방정식에서 $x^2 + y^2 = a^2$을 빼면 $-2x\sqrt{r^2 - a^2} + (r^2 - a^2) = r^2 - a^2$이므로 $x = 0$이고($r \neq a$이므로), 따라서 $y = \pm a$이다. 두 원은 정확히 $(0, a)$와 $(0, -a)$에서 만나며, 이 두 점은 C 위에서 지름의 양 끝에 있다. 따라서 반지름이 r인 이 원은 C를 이등분한다.

$r \leq a$일 때의 불가능성. 반지름이 r인 어떤 원이 C를 이등분한다면, $(*)$에 의해 $r^2 = OQ^2 + a^2 \geq a^2$이다. 따라서 $r < a$는 불가능하다. $r = a$이면 $(*)$에 의해 $OQ = 0$이어야 하므로 D는 C 자신이 되고, 이 원은 C와 정확히 두 점이 아니라 무한히 많은 점에서 만난다. 그러므로 반지름이 $r \leq a$인 원은 C를 이등분하지 않는다.

소문항 (ii)

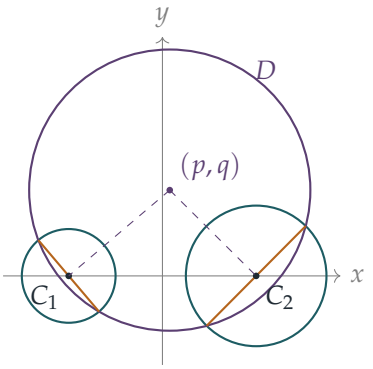
D의 중심을 (p, q)라 하자. 각 원에 $(*)$를 적용하면(원점을 해당 원의 중심으로 옮겨서) 다음을 얻는다.

$$(p + d)^2 + q^2 = r^2 - a_1^2,$$
$$(p - d)^2 + q^2 = r^2 - a_2^2.$$

첫째 식에서 둘째 식을 빼면 q^2항과 p^2항이 소거되어 $4pd = a_2^2 - a_1^2$만 남으므로

$$p = \frac{a_2^2 - a_1^2}{4d},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.



그림($d = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1.5$, $r = 3$)에서 각 공통현(호박색)은 C_1 또는 C_2의 지름이며, 두 중심을 잇는 점선에 수직이다.

q를 구하기 위해 p를 첫째 방정식에 다시 대입한다. 먼저

$$p + d = \frac{4d^2 + a_2^2 - a_1^2}{4d},$$

이므로

$$q^2 = r^2 - a_1^2 - \frac{(4d^2 + a_2^2 - a_1^2)^2}{16d^2} = \frac{16d^2r^2 - 16d^2a_1^2 - (4d^2 + a_2^2 - a_1^2)^2}{16d^2}.$$

분자에서 빼는 항들을 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 16d^2a_1^2 + (4d^2 + a_2^2 - a_1^2)^2 &= 16d^4 + 8d^2(a_2^2 - a_1^2) + 16d^2a_1^2 + (a_2^2 - a_1^2)^2 \\ &= 16d^4 + 8d^2(a_1^2 + a_2^2) + (a_2^2 - a_1^2)^2 \\ &= (4d^2 + (a_2 - a_1)^2)(4d^2 + (a_2 + a_1)^2), \end{aligned}$$

여기서 마지막 줄은 $(a_2 - a_1)^2 + (a_2 + a_1)^2 = 2(a_1^2 + a_2^2)$이고 $(a_2 - a_1)^2(a_2 + a_1)^2 = (a_2^2 - a_1^2)^2$이기 때문에 성립한다. 따라서

$$q = \pm\frac{\sqrt{16r^2d^2 - (4d^2 + (a_2 - a_1)^2)(4d^2 + (a_2 + a_1)^2)}}{4d}.$$

생각해 보기 부등식(inequality)은 어디에서 나오는가? 지금까지는 부등식처럼 보이는 것이 하나도 없다.

중심 (p, q)는 실제 좌표평면 위의 점이므로 $q^2 \geq 0$이다. $16d^2 > 0$이므로 이는 다음을 뜻한다.

$$16r^2d^2 \geq (4d^2 + (a_2 - a_1)^2)(4d^2 + (a_2 + a_1)^2),$$

이것이 r에 대하여 구하려는 조건이다.

또한 소문항 (i)의 조건 $r > a_1$(및 $r > a_2$)이 추가 조건이 아님을 확인해야 한다. $d > a_1$이므로 $4d^2 + a_2^2 - a_1^2 > 0$이고, 따라서 $p + d > 0$이다. 그러면 $r^2 - a_1^2 = (p + d)^2 + q^2 > 0$이다. 마찬가지로 $d > a_2$이므로 $d - p > 0$이고, $r^2 - a_2^2 = (p - d)^2 + q^2 > 0$이다. 따라서 위에서 구한 원 D는 실제로 C_1과 C_2를 모두 이등분한다.

검산

- 대칭인 경우 $a_1 = a_2 = a$: 이때 y축에 대한 대칭성이 요구하는 대로 $p = 0$이고, 조건은 $16r^2d^2 \geq 4d^2(4d^2 + 4a^2)$, 즉 $r^2 \geq d^2 + a^2$이 된다. 이는 중심이 원점에 있을 때의 $(*)$와 정확히 같으며, 원점은 두 점 $(\pm d, 0)$ 모두에 가장 가까운 중심의 위치이다.
- 그림의 예에서 $p = 0.15625$, $q \approx 1.830$이고, D와 C_1의 교점은 대략 $(-1.353, -0.762)$와 $(-2.647, 0.762)$이며, 그 중점은 C_1의 중심인 $(-2, 0)$이다. 이 경우 가능한 가장 작은 r는 약 2.377이다.

- C_1과 C_2를 맞바꾸어도$(a_1 \leftrightarrow a_2, d \to -d)$ p의 식의 꼴은 변하지 않고 부등식도 변하지 않는다. 당연히 그래야 한다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 $r = a$인 경우를 빠뜨리는 것: $(*)$는 $OQ = 0$을 허용하므로, $D = C$가 왜 해당하지 않는지 밝혀야 한다.
- 조건을 $OQ^2 = r^2 + a^2$으로 쓰는 것. 이는 이등분하는 것과 직각으로 만나는 것(직교하는 원, orthogonal circles)을 혼동한 것이다. 삼각형을 그려 보라. 직각은 C의 중심에 있으므로 빗변은 D의 반지름 r이다.
- $q = +\sqrt{\cdots}$만 답하는 것: x축에 대하여 대칭이동하면 두 번째 원을 얻는다.

STEP 너머

점 (p, q)와 중심이 (x_0, y_0)이고 반지름이 r인 원에 대하여 $(p - x_0)^2 + (q - y_0)^2 - r^2$을 그 원에 대한 점의 **방멱**(power)이라 하고, 두 원에 대한 방멱이 같은 점들의 집합은 직선이 되는데, 이를 **근축**(radical axis)이라 한다. 우리가 한 것처럼 두 원의 방정식을 빼면 근축을 구할 수 있다. 여기서 이등분 조건은 C의 중심의 D에 대한 방멱이 $-a^2$이라는 것을 말한다. 이러한 아이디어와 이와 관련된 원에 대한 반전(inversion)은 Needham의 *Visual Complex Analysis*에 아름답게 전개되어 있으며, STEP 스타일의 활용 예는 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에 많이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.