풀이

STEP II 2015, 문제 6

순수수학 • 대칭성에 의한 적분

> **STEP II 2015, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q6

핵심 아이디어

$\sin x$를 $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$로 쓰면 $1 + \sin x$가 배각(double-angle) 식으로 바뀌고, 그러면 $\sec^2$은 곧바로 적분된다. 치환(substitution) $y = \pi - x$는 $[0, \pi]$를 그 중점에 대하여 반사(reflection)하는데, $\sin x$는 이 반사에 대해 변하지 않는다. 따라서 $\mathrm{f}(\sin x)$ 앞에 곱해진 다항식 인수는 그것을 반사한 형태로 바꿔 쓸 수 있다. 소문항 (iii)의 삼차식은 이렇게 바꿔 쓰면 x의 거듭제곱이 한꺼번에 모두 사라지도록 골라 놓은 것이다.

풀이

소문항 (i)

$\sin x = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$이고 $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$이므로, $\theta = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$로 두면

$$1 + \sin x = 1 + \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right) = 2\cos^2\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right).$$

양변의 역수(reciprocal)를 취하고 2를 곱하면 $\sec^2\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right) = \dfrac{2}{1 + \sin x}$를 얻으므로, 원하는 결과가 성립한다. (양변은 $\sin x = -1$인 같은 점들에서 정의되지 않는다.)

따라서

$$\int \frac{1}{1 + \sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sec^2\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x = -\tan\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right) + C,$$

이다. $\tan\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$를 미분하면 연쇄법칙(chain rule)에 의해 $-\frac{1}{2}$라는 인수가 생기기 때문이다.

소문항 (ii)

$I = \int_0^\pi x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$라 하자. $y = \pi - x$로 두면 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$이고, 적분 구간의 끝 $x = 0, \pi$는 $y = \pi, 0$이 되며, $\sin x = \sin(\pi - y) = \sin y$이다. 그러면

$$\begin{aligned} I &= \int_\pi^0 (\pi - y)\,\mathrm{f}(\sin y)\,(-\mathrm{d}y) = \int_0^\pi (\pi - y)\,\mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y \\ &= \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y - \int_0^\pi y\,\mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y = \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x - I, \end{aligned}$$

이다. y는 단지 형식 변수(dummy variable)일 뿐이기 때문이다. 따라서 $2I = \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$이고, 이것이 구하는 결과이다.

생각해 보기 모르는 적분 I가 양변에 모두 나타났다. 이것이 문제가 될까?

그렇지 않다. 오히려 바로 우리가 원하던 것이다. 치환으로 I의 값을 직접 구하는 것은 아니지만, I에 대한 일차방정식을 얻게 되고, 그 방정식을 풀면 된다.

이제 $\mathrm{f}(t) = \dfrac{1}{1+t}$로 두자. 이 함수는 $t \in [0,1]$에서 연속이며, 이 구간은 $[0, \pi]$에서 $\sin x$가 갖는 값의 범위이다. 소문항 (i)에 의해

$$\int_0^\pi \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\tan\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right) \Big]_0^\pi = -\tan\left(-\tfrac{1}{4}\pi\right) + \tan\tfrac{1}{4}\pi = 1 + 1 = 2,$$

이고, $\tan\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$는 $[0, \pi]$에서 연속이다. 각이 $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ 안에 머물기 때문이다. 그러므로

$$\int_0^\pi \frac{x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi.$$

소문항 (iii)

같은 반사를 이용한다. $g(x) = 2x^3 - 3\pi x^2$라 하자. 전개하면

$$\begin{aligned} g(\pi - x) &= 2(\pi^3 - 3\pi^2 x + 3\pi x^2 - x^3) - 3\pi(\pi^2 - 2\pi x + x^2) \\ &= -\pi^3 + 3\pi x^2 - 2x^3 = -\pi^3 - g(x). \end{aligned}$$

$J = \int_0^\pi \dfrac{g(x)}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$라 하자. 소문항 (ii)에서와 똑같이 $y = \pi - x$로 치환하면

$$J = \int_0^\pi \frac{g(\pi - y)}{(1+\sin y)^2}\,\mathrm{d}y = -\pi^3 K - J, \qquad \text{단, } K = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x)^2}.$$

따라서 $J = -\frac{1}{2}\pi^3 K$이다.

생각해 보기 왜 하필 이 삼차식이 이렇게 잘 들어맞을까?

중점으로부터의 거리 $u = x - \frac{1}{2}\pi$로 나타내면 $g(x) = 2u^3 - \frac{3}{2}\pi^2 u - \frac{1}{2}\pi^3$이다. $\sin x = \cos u$이므로 함수 $1/(1+\sin x)^2$는 u에 대한 우함수(even function)이고, 따라서 홀수 차수 항 $2u^3$과 $-\frac{3}{2}\pi^2 u$는 대칭 구간에서 적분하면 0이 된다. 상수 $-\frac{1}{2}\pi^3$만 남는데, 이것이 바로 앞에서 얻은 결과이다. 소문항 (ii)도 $x = u + \frac{1}{2}\pi$로 두면 같은 이야기이다.

K를 구하기 위해 소문항 (i)의 항등식을 제곱하면 $\dfrac{1}{(1+\sin x)^2} = \frac{1}{4}\sec^4\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$이다. $u = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$로 치환하면 $\mathrm{d}x = -2\,\mathrm{d}u$이고, $x = 0, \pi$는 $u = \frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi$가 된다. $\sec^4 u = (1+\tan^2 u)\sec^2 u$로 쓰면 그 적분은 $\tan u + \frac{1}{3}\tan^3 u$이므로

$$\begin{aligned} K &= \int_{\pi/4}^{-\pi/4} \tfrac{1}{4}\sec^4 u\,(-2\,\mathrm{d}u) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1+\tan^2 u)\sec^2 u\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\Big[\tan u + \tfrac{1}{3}\tan^3 u\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\tfrac{4}{3} + \tfrac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

그러므로

$$\int_0^{\pi} \frac{2x^3 - 3\pi x^2}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi^3}{2}\cdot\frac{4}{3} = -\frac{2\pi^3}{3}.$$

검산

- $-\tan\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$를 미분하면 $\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right) = 1/(1+\sin x)$를 얻는다.
- 부호: 소문항 (ii)에서 피적분함수는 양수이고, $\frac{1}{2} \le 1/(1+\sin x) \le 1$로부터 하한 $\frac{1}{4}\pi^2 \approx 2.47$과 상한 $\frac{1}{2}\pi^2 \approx 4.93$을 얻으므로 $\pi \approx 3.14$는 그럴듯한 값이다. 소문항 (iii)에서는 $(0, \pi]$에서 $2x^3 - 3\pi x^2 = x^2(2x - 3\pi) < 0$이므로 답이 음수인 것이 맞다.
- 수치 적분(numerical quadrature)으로 계산하면 $\int_0^{\pi}(1+\sin x)^{-2}\,\mathrm{d}x \approx 1.33333$이고 소문항 (iii)의 적분은 ≈ -20.6709인데, 이는 각각 $\frac{4}{3}$, $-\frac{2}{3}\pi^3$과 일치한다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 연쇄법칙으로 생기는 인수 $-\frac{1}{2}$를 빠뜨려 $+2\tan(\dots)$나 $-\frac{1}{2}\tan(\dots)$를 얻는 실수.
- 적분 구간의 위끝과 아래끝을 바꾸면 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$에서 생긴 음의 부호가 상쇄된다는 것을 잊는 실수.
- 소문항 (iii)에서 부분적분(integration by parts)을 세 번 하려는 것. 그렇게 해도 풀 수는 있지만, 반사를 이용하면 한 줄로 끝난다.

STEP 너머

소문항 (ii)의 요령은 대칭성(symmetry)을 이용한다. 가중 함수(weight function)가 어떤 반사에 대해 변하지 않으면, 피적분함수 중 반사의 중심에 대해 우함수인 부분만이 적분값에 기여한다. 이 아이디어는 대학 1학년 수학 곳곳에서 만나게 된다. 푸리에 급수(Fourier series)에서 기함수(odd function)는 코사인 항을 갖지 않고, 확률에서 μ에 대해 대칭인 분포는 평균이 μ이다. 치환 $t = \tan\frac{1}{2}x$는 $\sin x$와 $\cos x$의 임의의 유리함수(rational function)에 대해 쓸 수 있는 체계적인 대안이다. 이와 같은 적분을 더 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.