풀이

STEP II 2015, 문제 5

순수수학 • 아크탄젠트 급수

> **STEP II 2015, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q5

핵심 아이디어

탄젠트 덧셈정리(tangent addition formula)를 쓰면 역탄젠트(arctangent)들의 합이 하나의 분수로 바뀌므로, $\tan S_n$에 대한 귀납법(induction)은 신중한 계산의 문제가 된다. 미묘한 점은 $\tan S_n$에서 S_n 자체로 넘어가는 단계이다. 탄젠트 값을 안다고 해서 각이 π의 정수배 차이를 넘어서 정해지지는 않으므로, S_n이 어느 구간에 있는지 확정해야 한다. 소문항 (ii)에서는 각 α_n이 바로 소문항 (i)의 역탄젠트들이라는 것이 밝혀지고, 무한급수(infinite sum)는 S_n의 극한(limit)이 된다.

풀이

소문항 (i)

$\theta_m = \arctan\left(\frac{1}{2m^2}\right)$로 두면 $S_n = \theta_1 + \cdots + \theta_n$이고 $\tan\theta_m = \frac{1}{2m^2}$이다.

$\tan S_n$에 대한 공식. $n = 1$일 때 $\tan S_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$이므로 결과가 성립한다.

어떤 $n \geq 1$에 대하여 $\tan S_n = \frac{n}{n+1}$이라고 가정하자. $S_{n+1} = S_n + \theta_{n+1}$이므로 덧셈정리에 의해

$$\tan S_{n+1} = \frac{\tan S_n + \tan\theta_{n+1}}{1 - \tan S_n \tan\theta_{n+1}} = \frac{\dfrac{n}{n+1} + \dfrac{1}{2(n+1)^2}}{1 - \dfrac{n}{2(n+1)^3}}.$$

곱 $\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{2(n+1)^2}$이 1보다 작으므로 분모는 0이 아니다. 분자와 분모에 $2(n+1)^3$을 곱하면

$$\tan S_{n+1} = \frac{(n+1)(2n(n+1)+1)}{2(n+1)^3 - n} = \frac{(n+1)(2n^2+2n+1)}{2n^3+6n^2+5n+2}.$$

생각해 보기 분모가 깔끔하게 인수분해된다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

목표는 $\frac{n+1}{n+2}$이므로 분모는 $(n+2)(2n^2+2n+1)$이어야 한다. 전개해 보면 실제로 $(n+2)(2n^2+2n+1) = 2n^3+6n^2+5n+2$이다. 양수인 인수 $2n^2+2n+1$을 약분하면

$$\tan S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2},$$

이고, 이것이 $n+1$에 대한 결과이다. 귀납법에 의해 모든 $n \geq 1$에 대하여 $\tan S_n = \frac{n}{n+1}$이다.

S_n에 대한 공식. $\tan S_n = \frac{n}{n+1}$만으로는 어떤 정수 k에 대하여 $S_n = \arctan\frac{n}{n+1} + k\pi$라는 것밖에 말할 수 없다. $k=0$임을 보이기 위해 다시 귀납법으로

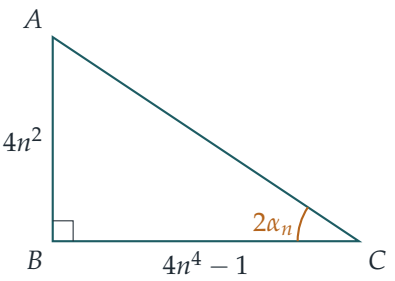
$$S_n = \arctan\frac{n}{n+1}.$$

임을 증명한다. $n=1$일 때 $S_1 = \arctan\frac{1}{2}$이므로 성립한다. 어떤 n에 대하여 결과가 성립한다고 가정하자. $0 < \frac{n}{n+1} < 1$이므로 $0 < S_n < \arctan 1 = \frac{1}{4}\pi$이다. 또 $0 < \frac{1}{2(n+1)^2} < 1$이므로 $0 < \theta_{n+1} < \frac{1}{4}\pi$이다. 두 식을 더하면

$$0 < S_{n+1} = S_n + \theta_{n+1} < \tfrac{1}{2}\pi.$$

따라서 S_{n+1}은 $[0, \frac{1}{2}\pi)$에 있는데, 이는 음이 아닌 수에서 arctan의 치역과 정확히 일치하며, 첫 번째 결과에 의해 $\tan S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$이다. 이 구간에서 tan은 일대일(one-to-one)이므로 $S_{n+1} = \arctan\frac{n+1}{n+2}$이다. 이로써 귀납법이 완성된다.

소문항 (ii)



B에서의 각이 직각이므로 각 C의 대변은 AB이고 이웃한 변은 BC이다($n \geq 1$이면 $4n^4-1 > 0$임에 주의하자). 따라서

$$\tan 2\alpha_n = \frac{AB}{BC} = \frac{4n^2}{4n^4-1}.$$

소문항 (i)을 보면 $\tan\alpha_n = \frac{1}{2n^2}$을 시도해 볼 만하다. $t = \frac{1}{2n^2}$로 두면 배각 공식(double-angle formula)에 의해

$$\frac{2t}{1-t^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{4n^4}} = \frac{4n^2}{4n^4-1},$$

이 되어 일치한다. 이것이 단지 가능한 값 중 하나가 아니라 바로 그 값임을 확인하기 위해 $t = \tan\alpha_n$으로 쓰자. 방정식 $\frac{2t}{1-t^2} = \frac{4n^2}{4n^4-1}$을 정리하면 이차방정식(quadratic)

$$4n^2t^2 + 2(4n^4-1)t - 4n^2 = 0,$$

을 얻고, 이 방정식의 두 근의 곱은 -1이다. 한 근이 $\frac{1}{2n^2}$이므로 다른 근은 $-2n^2 < 0$이다. 그런데 $2\alpha_n$은 직각삼각형에서 직각이 아닌 각이므로 $0 < 2\alpha_n < \frac{1}{2}\pi$이고, 따라서 $0 < \alpha_n < \frac{1}{4}\pi$이며 $t > 0$이다. 그러므로 $\tan\alpha_n = \frac{1}{2n^2}$이고, α_n이 arctan의 치역에 있으므로

$$\alpha_n = \arctan\frac{1}{2n^2}.$$

생각해 보기 여기서 무한급수는 무엇을 뜻하며, 소문항 (i)은 어떻게 도움이 될까?

무한급수는 부분합(partial sums)의 극한이며, 소문항 (i)에 의해 부분합은

$$\sum_{n=1}^{N}\alpha_n = S_N = \arctan\frac{N}{N+1}.$$

이다. $N \to \infty$일 때 $\frac{N}{N+1} \to 1$이고, arctan이 연속(continuous)이므로 $\arctan\frac{N}{N+1} \to \arctan 1 = \frac{1}{4}\pi$이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \tfrac{1}{4}\pi,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

검산

- $n = 1$일 때 소문항 (ii)의 삼각형은 익숙한 3–4–5 삼각형이고, $\tan 2\alpha_1 = \frac{4}{3}$이다. 이때 $\tan\alpha_1 = \frac{1}{2}$는 $\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$을 만족한다.
- $S_2 = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{8}$이고, $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$이므로 공식이 예측한 대로이다.
- 수치적으로 처음 2000개의 항을 더하면 $S_{2000} \approx 0.785148$이고, $\frac{1}{4}\pi \approx 0.785398$과 비교된다. 차이는 약 $\frac{1}{4000}$인데, 이는 당연하다. 뺄셈 공식(subtraction formula)에 의해 정확히 $\frac{1}{4}\pi - \arctan\frac{N}{N+1} = \arctan\frac{1}{2N+1}$이기 때문이다.

흔한 실수

- S_n이 $[0, \frac{1}{2}\pi)$에 있음을 보이지 않고 $\tan S_n = \frac{n}{n+1}$에서 곧바로 $S_n = \arctan \frac{n}{n+1}$이라고 결론짓는 것.
- 이차방정식의 다른 근을 배제하지 않고 운 좋은 추측만으로 $\tan \alpha_n = \frac{1}{2n^2}$이라고 두는 것.
- 무한급수가 S_N의 극한이라는 말 없이 S_∞처럼 다루는 것.

STEP 너머

이것은 모습을 바꾼 망원급수(telescoping series)이다. $\frac{1}{2m^2} = \frac{(2m+1)-(2m-1)}{1+(2m+1)(2m-1)}$이므로 각 항은 $\arctan(2m+1) - \arctan(2m-1)$이고, 합은 $\arctan(2n+1) - \frac{1}{4}\pi$로 줄어드는데, 이는 $\arctan \frac{n}{n+1}$과 같다. 무한급수를 부분합의 극한으로 정의하는 것, 그리고 극한을 연속함수 안으로 언제 옮길 수 있는지 아는 것은 해석학(analysis) 첫 강좌의 출발점이다. 이에 대해 읽어 보기 좋은 책은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.