풀이

STEP II 2015, 문제 4

순수수학 • 역탄젠트의 분지

> **STEP II 2015, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q4

핵심 아이디어

$\tan\theta$를 안다고 해도 θ는 π의 정수배 차이까지만 결정된다. 따라서 각 방정식에는 해의 가지(branch)가 무수히 많으며, 이 가지들은 모두 서로를 π만큼 수직으로 평행이동한 것이다. 연속성(continuity)과 $x = 0$에서의 값이 그중 한 가지를 골라 준다. 또한 우변이 $\pm\infty$로 발산할 때마다 연속성 때문에 가지를 **바꾸어야** 한다. 바로 그 순간이 각이 $\frac{1}{2}\pi$의 홀수배를 지나는 순간이다. 그래서 각 소문항에서 먼저 우변의 그래프를 그린 다음, 각을 연속적으로 따라간다.

이 풀이 전체에서 arctan은 $-\frac{1}{2}\pi < \arctan u < \frac{1}{2}\pi$인 주값(principal value)을 뜻한다.

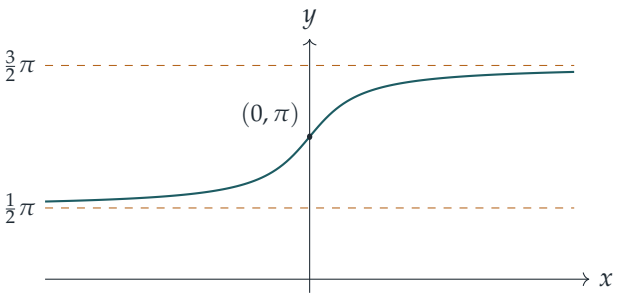
풀이

소문항 (i)

$\tan\theta = x$의 모든 해는 정수 n에 대해 $\theta = \arctan x + n\pi$ 꼴이다. 함수 $\arctan x$는 실수 전체에서 연속이므로 $\mathrm{f}(x) - \arctan x$는 $\{n\pi\}$에 속하는 값만 갖는 연속함수이다. 연속함수는 이렇게 서로 떨어져 있는 값들 사이를 건너뛸 수 없으므로 이 함수는 상수이다. $\mathrm{f}(0) = \pi$이고 $\arctan 0 = 0$이므로 그 상수는 π이다.

$$\mathrm{f}(x) = \pi + \arctan x.$$

따라서 이 곡선은 익숙한 arctan 곡선을 π만큼 위로 올린 것이다. 이 곡선은 순증가(strictly increasing)하고, 기울기(gradient) 1로 $(0, \pi)$를 지나며($\mathrm{f}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$이므로), $x \to -\infty$일 때 수평 점근선(horizontal asymptote) $y = \frac{1}{2}\pi$를, $x \to \infty$일 때 수평 점근선 $y = \frac{3}{2}\pi$를 갖는다. 또한 $(0, \pi)$에 대해 위수 2의 회전대칭(rotational symmetry)을 갖는데, 이는 $\mathrm{f}(-x) = 2\pi - \mathrm{f}(x)$이기 때문이다.



소문항 (ii)

곡선 $y = \dfrac{x}{1+x^2}$**.** 이를 $q(x)$라 하자. 이 함수는 기함수(odd function)이고, 함숫값이 영이 되는 것은 $x = 0$일 때뿐이며, 부호는 x의 부호와 같다. $x \to \pm\infty$일 때 $q(x) \approx 1/x \to 0$이므로 x축이 점근선이며, 오른쪽에서는 위에서, 왼쪽에서는 아래에서 접근한다. 미분하면

$$q'(x) = \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$

이므로 정상점(stationary point)은 $x = \pm 1$에 있다. 극댓점은 $(1, \frac{1}{2})$이고 극솟점은 $(-1, -\frac{1}{2})$이다. (산술-기하 평균 부등식(AM–GM)에 의해 $1 + x^2 \geq 2|x|$이므로 $|q(x)| \leq \frac{1}{2}$라고 해도 같다.) 원점에서의 기울기는 1이다.

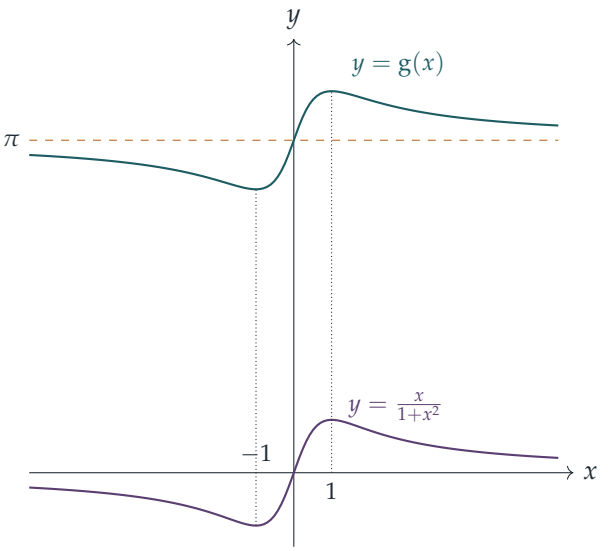
곡선 $y = \mathrm{g}(x)$**.** 이번에는 우변 $q(x)$가 연속이고 유계이므로, 소문항 (i)과 똑같은 논증으로 다음을 얻는다.

$$\mathrm{g}(x) = \pi + \arctan \frac{x}{1+x^2}.$$

arctan이 증가함수이므로 g는 q와 정확히 같은 구간에서 증가하고 감소한다. 따라서

- $x \to \pm\infty$일 때 $\mathrm{g}(x) \to \pi$이다(오른쪽에서는 위에서, 왼쪽에서는 아래에서 접근한다);
- g는 $x = 1$에서 극댓값 $\pi + \arctan \frac{1}{2} \approx 3.61$을, $x = -1$에서 극솟값 $\pi - \arctan \frac{1}{2} \approx 2.68$을 갖는다;
- 이 곡선은 기울기 $\dfrac{q'(0)}{1+q(0)^2} = 1$로 $(0, \pi)$를 지난다.

그 모양은 q의 그래프를 약간 납작하게 하고($u > 0$일 때 $\arctan u < u$이므로) π만큼 위로 올린 것이다. 이 곡선은 $\frac{1}{2}\pi$나 $\frac{3}{2}\pi$ 근처에는 결코 가지 않으므로 가지를 바꿀 필요가 전혀 없다.



소문항 (iii)

곡선 $y = \dfrac{x}{1-x^2}$**.** 이를 $r(x)$라 하자. 이 함수는 기함수이고, 함숫값이 영이 되는 것은 $x = 0$일 때뿐이며, $x = \pm 1$에서 수직 점근선을 갖는다. $x \to \pm\infty$일 때 $r(x) \approx -1/x \to 0$이다. 도함수는

$$r'(x) = \frac{(1-x^2)+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} > 0,$$

이므로 r는 정의된 세 구간 각각에서 순증가한다. x와 $1-x^2$의 부호를 살펴보면 다음과 같다.

- $x < -1$에서 r는 0^+($x \to -\infty$일 때)에서 $+\infty$($x \to -1^-$일 때)까지 증가한다;
- $-1 < x < 1$에서 r는 $-\infty$에서 $+\infty$까지 증가하며, 기울기 1로 원점을 지난다;
- $x > 1$에서 r는 $-\infty$($x \to 1^+$일 때)에서 0^-($x \to \infty$일 때)까지 증가한다.

곡선 $y = \mathrm{h}(x)$**.** 각 구간에서 따로 보면 r는 연속이므로, 그 구간에서 $\mathrm{h}(x) - \arctan r(x)$는 π의 일정한 정수배이다. 그러나 그 배수는 구간마다 다를 수 있다. 이를 구간별로 구해 보자.

$-1 < x < 1$에서는 조건 $\mathrm{h}(0) = \pi$로부터 $\mathrm{h}(x) = \pi + \arctan r(x)$를 얻는다. $x \to 1^-$일 때 $r \to +\infty$이므로 $\mathrm{h}(x) \to \pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi$이고, $x \to -1^+$일 때 $r \to -\infty$이므로 $\mathrm{h}(x) \to \frac{1}{2}\pi$이다. $x = \pm 1$에서의 연속성에 의해 $\mathrm{h}(1) = \frac{3}{2}\pi$이고 $\mathrm{h}(-1) = \frac{1}{2}\pi$이어야 한다.

생각해 보기 $x = 1$의 바로 오른쪽에서는 $r(x)$가 절댓값이 큰 음수이므로 $\arctan r(x)$는 $-\frac{1}{2}\pi$에 가깝다. $x = 1$에서 h가 연속이 되려면 π의 몇 배를 더

? 해야 할까?

$x > 1$에서는 $\mathrm{h}(x) = n\pi + \arctan r(x)$이고, $x \to 1^+$일 때 이 값은 $n\pi - \frac{1}{2}\pi$로 수렴한다. 이것이 $\frac{3}{2}\pi$와 같으려면 $n = 2$이어야 한다. 마찬가지로 $x < -1$에서는 $x \to -1^-$일 때 $\mathrm{h}(x) = m\pi + \arctan r(x) \to m\pi + \frac{1}{2}\pi$이고, 이것이 $\frac{1}{2}\pi$와 같으려면 $m = 0$이어야 한다. 따라서

$$\mathrm{h}(x) = \begin{cases} \arctan \dfrac{x}{1-x^2}, & x < -1, \\ \pi + \arctan \dfrac{x}{1-x^2}, & -1 < x < 1, \\ 2\pi + \arctan \dfrac{x}{1-x^2}, & x > 1, \end{cases} \qquad \mathrm{h}(\pm 1) = \pi \pm \tfrac{1}{2}\pi.$$

즉 r가 $+\infty$로 치솟았다가 $-\infty$에서 다시 나타날 때, 각 h는 그저 $\frac{3}{2}\pi$를 지나 계속 증가한다($x = -1$에서 $\frac{1}{2}\pi$를 지날 때도 마찬가지이다).

이제 개형의 특징을 정리하자.

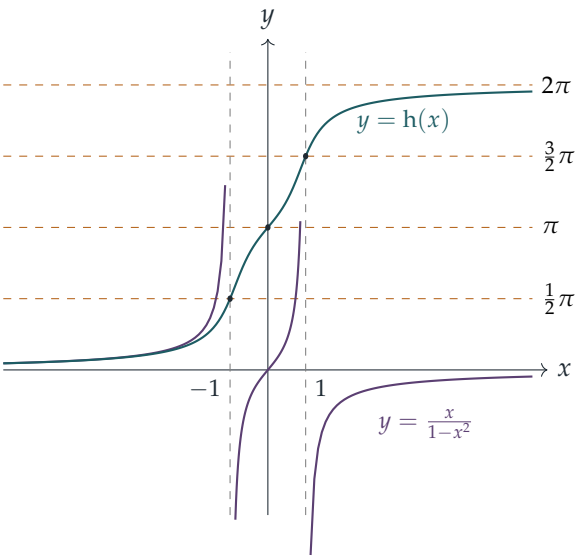
- **점근선**. $x \to -\infty$일 때 $r \to 0^+$이므로 $\mathrm{h}(x) \to 0$이고 위에서 접근한다. $x \to \infty$일 때 $r \to 0^-$이므로 $\mathrm{h}(x) \to 2\pi$이고 아래에서 접근한다.
- **단조성**. ± 1이 아닌 곳에서는 연쇄법칙(chain rule)에 의해

  $$\mathrm{h}'(x) = \frac{r'(x)}{1 + r(x)^2} = \frac{1 + x^2}{(1-x^2)^2 + x^2} = \frac{1 + x^2}{x^4 - x^2 + 1} > 0.$$

  (분모는 $(x^2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$이다.) 이 식은 $x = \pm 1$에서도 아무 문제 없이 정의되며 그 값은 2이므로, h는 그곳에서 매끄럽다. 즉 곡선은 꺾임 없이 $(1, \frac{3}{2}\pi)$와 $(-1, \frac{1}{2}\pi)$를 기울기 2로 지난다.
- **주요 점**. 기울기가 1인 $(0, \pi)$, 그리고 기울기가 2인 $(\pm 1, \pi \pm \frac{1}{2}\pi)$.
- **대칭성**. $\mathrm{h}(-x) = 2\pi - \mathrm{h}(x)$이므로 곡선은 $(0, \pi)$에 대해 회전대칭이다.

따라서 h는 0에서 2π까지 꾸준히 증가하며, 소문항 (i)의 곡선과 같은 S자 모양이지만 높이는 두 배이다. 그래프에서 r의 점근선 $x = \pm 1$은 h가 $\frac{1}{2}\pi$와 $\frac{3}{2}\pi$를 지나는 점과 정확히 일치한다.

세 경우를 한꺼번에 깔끔하게 나타내는 방법이 있다. $\mathrm{h}(x) - \pi$는 점 $(1 - x^2, x)$의 $(-\pi, \pi)$에 속하는 편각이다. 이 점은 원점이나 수평축의 음의 부분에 결코 닿지 않으며($1 - x^2 \le 0$일 때 $x \neq 0$이므로), 이것이 각이 연속적으로 변하는 이유이다.



검산

- 각 식은 정의 방정식을 만족한다. 예를 들어 $\tan(2\pi+\theta)=\tan\theta$이고, 0에서의 값은 모두 π이다.
- 특정 값 확인: $g(1)=\pi+\arctan\frac{1}{2}\approx 3.605$이고, $h(2)=2\pi+\arctan(-\frac{2}{3})\approx 5.695$인데, 이 값은 그래프에서 요구하는 대로 $\frac{3}{2}\pi\approx 4.712$와 $2\pi\approx 6.283$ 사이에 있다.
- h의 연속성: $h(0.999)\approx 4.710$이고 $h(1.001)\approx 4.714$로 $\frac{3}{2}\pi\approx 4.712$의 양쪽에 있으며, 이는 $x=1$에서 기울기가 2라는 사실과 들어맞는다. $[-10,10]$을 촘촘히 훑는 컴퓨터 검사로 f, g, h 중 어느 것도 어디에서도 값이 뛰지 않음을 확인했다.

흔한 실수

- 모든 x에 대해 $h(x)=\pi+\arctan\frac{x}{1-x^2}$라고 쓰는 것. 이 함수는 $x=1$에서 π만큼 아래로, $x=-1$에서 π만큼 위로 뛰므로 연속이 아니다.
- $\frac{x}{1-x^2}$가 수직 점근선을 가진다는 이유만으로 $y=h(x)$에도 $x=\pm1$에서 수직 점근선을 그리는 것. 각은 유한하게 남으며, 무한대로 발산하는 것은 그 탄젠트뿐이다.
- $y=h(x)$를 $x=\pm1$에서 꺾이게 그리는 것. 그곳에서의 기울기는 양쪽 모두 2이다.

STEP 너머

우리가 한 일은 다가 역함수(many-valued inverse function)의 연속인 가지를 고르는 것이었고, "탄젠트가 무한대를 지날 때마다 π를 더한다"는 규칙은 경로를 피복 공간(covering space)으로 올리기(lifting)를 처음 맛보는 것이다. 복소 로그와 $\arg z$에 대한 같은 아이디어가 복소해석학(complex analysis)의 회전수(winding number)와 편각 원리(argument principle)의 바탕을 이룬다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이를 기하학적으로 전개하며, 아주 즐겁게 읽을 수 있는 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.