풀이

STEP II 2015, 문제 3

순수수학 • 경우의 수와 수학적 귀납법

> **STEP II 2015, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q3

핵심 아이디어

삼각형을 가장 긴 막대에 따라 분류한다. T_n에서는 세지만 T_{n-1}에서는 세지 않는 삼각형은 정확히 길이 n인 막대를 사용하는 삼각형이므로, $T_n - T_{n-1}$은 $a+b \geq n$을 만족하는 쌍 $a < b < n$의 개수이다. 가운데 막대 b를 하나 고를 때마다 이 개수는 간단히 셀 수 있고, 그 개수들은 등차수열(arithmetic progression)을 이룬다. 연속한 두 차를 더하면 $T_{2m} - T_{2m-2}$를 얻는데, 이것이 바로 귀납(induction) 단계에서 필요한 것이다.

풀이

가장 긴 막대가 c인 삼각형 세기

T_n에서 세는 삼각형의 막대는 $a < b < c \leq n$이다. 이 가운데 $c \leq n-1$인 것은 정확히 T_{n-1}에서 세는 삼각형이므로

$$T_n - T_{n-1} = \#\{(a,b) : 1 \leq a < b < n,\ a+b \geq n\}.$$

가운데 막대 b를 고정하자. $n-b \leq a \leq b-1$이어야 하므로($b < n$이므로 $a \geq 1$은 저절로 성립한다), $2b - n > 0$일 때는 $2b-n$가지 선택이 있고 그렇지 않으면 하나도 없다. 따라서 b는 $\frac{n}{2}$보다 큰 가장 작은 정수부터 $n-1$까지 움직인다.

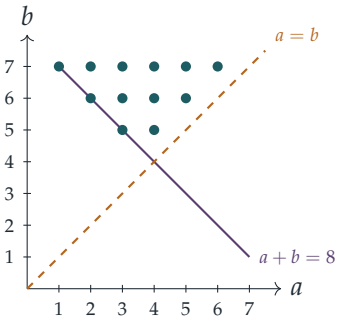
$n = 8$인 경우

$c = 8$일 때 가능한 가운데 막대는 $b = 5, 6, 7$이고, 각각 a의 선택은 2, 4, 6가지이다.

$$b = 5 :\ a \in \{3,4\}, \qquad b = 6 :\ a \in \{2,3,4,5\}, \qquad b = 7 :\ a \in \{1,\ldots,6\}.$$

($b = 4$이면 $4 \le a \le 3$이어야 하므로 불가능하다.) 따라서 요구한 대로 $T_8 - T_7 = 2 + 4 + 6 = 12$이다.

아래 그림은 이 12개의 쌍 (a, b)를 보여 준다. 이들은 직선 $a + b = 8$ 위 또는 그보다 위에 있고, 대각선 $a = b$보다 엄격히 위에 있는 점들이다.



$T_7 - T_6$의 경우 가장 긴 막대는 7이고, 가운데 막대 $b = 4, 5, 6$에 대해 $2b - 7 = 1, 3, 5$가지 선택이 있으므로 $T_7 - T_6 = 1 + 3 + 5 = 9$이다. 그러므로

$$T_8 - T_6 = (T_8 - T_7) + (T_7 - T_6) = 12 + 9 = 21.$$

일반적인 차

$n = 2m$이면 가운데 막대는 $b = m + 1, \ldots, 2m - 1$을 움직이고, 선택의 수는 $2b - 2m = 2, 4, \ldots, 2(m - 1)$이다.

$$T_{2m} - T_{2m-1} = 2 + 4 + \cdots + 2(m - 1) = m(m - 1).$$

$n = 2m - 1$이면 가운데 막대는 $b = m, \ldots, 2m - 2$를 움직이고, 선택의 수는 $2b - (2m - 1) = 1, 3, \ldots, 2m - 3$이며, 처음 $m - 1$개의 홀수의 합은 $(m - 1)^2$이다. 두 식을 더하면

$$T_{2m} - T_{2m-2} = m(m - 1) + (m - 1)^2 = (m - 1)(2m - 1).$$

($m = 4$이면 이 식들은 12와 21을 주어 위의 값과 일치한다.) 이 식들은 작은 쪽 첨자가 3 이상일 때, 즉 두 번째 식에서는 $m \ge 3$일 때 성립한다.

귀납법

$f(m) = \frac{1}{6}m(m - 1)(4m + 1)$이라 하자. 모든 $m \ge 2$에 대해 $T_{2m} = f(m)$임을 증명한다.

기저 단계(*base case*), $m = 2$. 막대 $1, 2, 3, 4$에서 가능한 네 가지 선택은 $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 4)$, $(2, 3, 4)$이고, $(1, 2, 4)$를 제외한 모두가 $a + b \ge c$를 만족한다. 따라서 $T_4 = 3$이고, $f(2) = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 9 = 3$이다.

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 $k \geq 3$에 대해 $T_{2k-2} = f(k-1)$이라 가정하자. 차에 관한 식에 의해

$$T_{2k} = f(k-1) + (k-1)(2k-1),$$

이므로 $f(k) - f(k-1) = (k-1)(2k-1)$임을 보이면 충분하다.

> ? **생각해 보기** 두 삼차식을 모두 전개하지 않고 $f(k) - f(k-1)$을 어떻게 정리할 수 있을까?

두 항 모두 인수 $k-1$을 가지므로 먼저 이것을 묶어 낸다.

$$\begin{aligned} f(k) - f(k-1) &= \tfrac{1}{6}(k-1)\big[k(4k+1) - (k-2)(4k-3)\big] \\ &= \tfrac{1}{6}(k-1)\big[(4k^2+k) - (4k^2-11k+6)\big] \\ &= \tfrac{1}{6}(k-1)(12k-6) = (k-1)(2k-1). \end{aligned}$$

따라서 $T_{2k} = f(k)$이다. 귀납법에 의해 모든 $m \geq 2$에 대해 $T_{2m} = \frac{1}{6}m(m-1)(4m+1)$이다.

막대의 개수가 홀수인 경우

$T_{2m-1} = T_{2m} - m(m-1)$을 이용하면

$$T_{2m-1} = \tfrac{1}{6}m(m-1)(4m+1) - m(m-1) = \tfrac{1}{6}m(m-1)(4m-5) \qquad (m \geq 2).$$

막대의 개수를 $2m+1$로 바꾸어 쓰면(m을 $m+1$로 바꾸면) 이 식은

$$T_{2m+1} = \tfrac{1}{6}m(m+1)(4m-1) \qquad (m \geq 1).$$

가 된다. 예를 들어 $T_3 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$이며, 이는 단 하나의 삼각형 $(1, 2, 3)$이다.

검산

- 공식에 따르면 $T_6 = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 13 = 13$, $T_7 = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 11 = 22$, $T_8 = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 17 = 34$이므로 $T_8 - T_7 = 12$, $T_8 - T_6 = 21$이 되어 직접 구한 값과 같다.
- $\{1, \ldots, n\}$에서 고른 모든 세 수의 조를 컴퓨터로 세어 보면, 3부터 79까지의 모든 n에 대해 두 닫힌 형태(closed form)와 일치한다.
- $n = 2m$일 때 짝수 공식은 대략 $\frac{2}{3}m^3 = \frac{n^3}{12}$이고, 홀수 공식도 같은 방식으로 움직인다. 이는 가능한 세 수의 조 $\binom{n}{3} \approx \frac{n^3}{6}$개의 절반이므로, n이 클 때 막대 세 개를 고르는 모든 방법 가운데 약 절반이 삼각형을 만든다.

흔한 실수

- 막대가 서로 다르므로 $a < b$가 엄격한 부등식이라는 것을 잊는 실수: $a = b$를 허용하면 과다하게 세게 된다.
- 넓이가 0인 (퇴화(degenerate)) 삼각형을 빠뜨리는 실수: 조건은 $a + b \geq c$이므로 $(1, 2, 3)$도 센다.
- 귀납법을 $m = 1$에서 시작하는 실수: $n \geq 3$이어야 하므로 T_2는 정의되지 않는다.

STEP 너머

그림에서처럼 어떤 영역 안의 격자점(lattice point)을 세는 것은 분할(partition)과 생성함수(generating function) 이론의 출발점이다. T_n은 유리 생성함수를 가지며, n이 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나뉘는 것은 그 분모에 있는 인수 $1 - x^2$를 반영한다. 이처럼 개수가 n의 다항식이되 n의 나머지(residue)에 따라 달라지는 결과를 준다항식(quasi-polynomial)이라 한다. 점화식(recurrence)과 세기 논증에 대해 더 알고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.